«Education Consulting»

Ұлттық Бірыңғай Тестілеуге дайындыққа арналған

ГЕОМЕТРИЯ

Алматы 2021

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72
К56

Кожахметов Д.Б., Газизов Т.С., Нуржан Р.

К56 Геометрия – Ұлттық Бірыңғай Тестілеуге дайындыққа арналған / Д.Б. Кожахметов, Т.С. Газизов, Р. Нуржан – Алматы: «Education Consulting», 2021. – 252 б.

ISBN 978-601-7593-23-0

«EduCon» компаниясы әдіскерлерінің «Геометрия» бойынша дайындаған жұмыс дәптері ҰБТ-ға дайындық курсына арналған теориялық және практикалық тапсырмалардан тұрады.

Кітап жалпы білім беретін орта мектеп оқушыларына, мұғалімдерге және талапкерлерге арналған.

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72

ISBN 978-601-7593-23-0

© «Education Consulting», 2021

СӨЗ БАСЫ

Сүйікті оқушылар және құрметті ұстаздар!

Білімнің негізі мектепте қаланады. Жақсы мектептен нәр алмаған оқушының болашақта жетістікке жетуі мүмкін емес. Мақсатқа жетудің жолы тек дайындықпен ғана емес. Дайындалатын материалдардың таңдаулы болуында. Осы мәселені негізге ала отырып, «EduCon» компаниясы білікті мамандарға ҰБТ-ға дайындыққа арналған оқу құралдары мен тест тапсырмаларын әзірлетті.

«EduCon» басылымдарының негізгі мақсаты оқушылардың мектепте алған білімін нығайтуға көмектесу. Бұл кітапты сынып ішінде қосымша оқу құралы ретінде пайдалануға болады.

ҰБТ-ға дайындықта сенімді серігіңіз – «EduCon» басылымдары тың жүйемен дайындалған, әлі сиясы кеппеген жап-жаңа кітаптарымен Сіздердің ең маңызды көмекшілеріңіз болады деген сенімдеміз.

Орта мектепті ойдағыдай бітіріп, Жоғары оқу орындарына түсу емтиханынан сүрінбей өту – өміріңіздің басты кезеңдерінің бірі. Оқитын бағытыңыз бен таңдаған мамандығыңыз «дүниенің кетігін қалар кірпішіңіз» іспетті.

Осындай маңызды сынаққа дайындалудың негізгі шарты: жаңа жүйеге сәйкес келетін түсінікті де сенімді оқулықтардан пайдалану. «EduCon» басылымдары ҰБТ-ға дайындықта қолыңыздан бір елі ажырамауы тиіс қайнар көзі. Әр басылымы жаңаланып, ҰБТ-ның сұрақтарына сәйкес құрастырылып толықтырылған осы кітаптар Сіздердің дайындығыңызды жеңілдетеді деген ойдамыз.

«EduCon» басылымдары ұжымдық жұмыстың өнімі. Көптеген жылдарын ҰБТ-ға дайындық курстарымен өткізген, тәжірибелі әрі білікті мамандардың қолынан шыққан бұл кітаптарда оқушыға тақырыпты тез әрі жеңіл түсіндіретін әдістер қолданылған.

Нық сеніммен дайындалуыңызға болатын «EduCon» басылымдарының бұл кітабымен бірге Сізді өз еркіңізге қалдыра отырып, ЖОО-ға созылған жолда барлығыңызға биік жетістіктер тілейміз.

EduCon
басылымдары

ПЛАНИМЕТРИЯ

Планиметрия – геометрияның жазықтықтағы фигураларды зерттейтін бөлімі

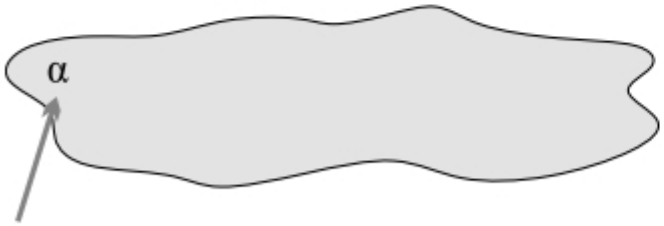
Жазықтық – шектелмеген, мінсіз тегіс және абсолют түзу бет.

Жазықтық шексіз және шетсіз болады.

Жазықтық шексіз және шетсіз болады.

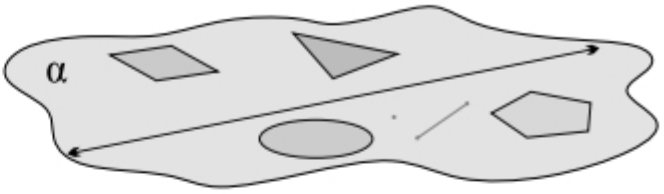
Жазықтық ретінде үстелдің бетін, тақтаның бетін немесе терезе әйнегінің бетін алуға болады. Бірақ олар жазықтықтың тек қана бір бөлігі, өйткені олар шектелген. Жазықтық шексіз, шектеусіз және барлық бағытта жайылған.

Жазықтықтар грек алфавитінің кіші әріптерімен белгіленеді: α, β, γ және т.с.с.



α (альфа) жазықтығы.

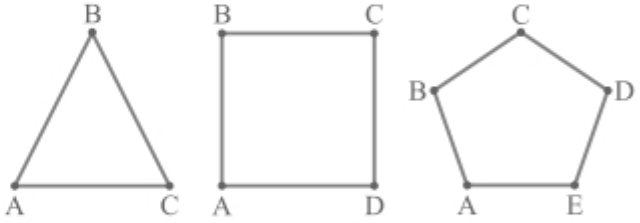
Фигура – сызықтармен шектелген жазықтықтың бір бөлігі.



НҮКТЕ

Нүктелер латын алфавитінің бас әріптерімен белгіленеді: A, B, C, D және т.с.с.

Нүкте кез келген геометриялық фигураның негізі болып табылады.



ТҮЗУ

Түзу – басы да, соңы да жоқ сызық.

Түзулер латын алфавитінің кіші әріптерімен немесе екі бас әріппен белгіленеді:

a, b, c, d немесе AB, BC, CD және т.с.с.

Кез келген екі нүкте арқылы тек қана бір түзу жүргізуге болады.

© «EduCon» басылымдары

СӘУЛЕ

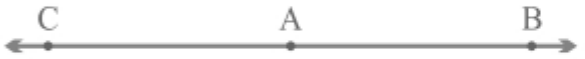
Сәуле – басы бар, бірақ соңы жоқ болатын түзудің бір бөлігі.

Сәулелер латын алфавитінің кіші әріптерімен немесе екі бас әріппен белгіленеді:

a, b, c, d немесе AB, BC, CD және т.с.с.

A нүктесі – сәуленің басы.

B нүктесі – сәуленің бойында жататын нүкте.



AC және AB сәулелері – толықтауыш сәулелер.

CA және CB сәулелері – беттесетін сәулелер.

КЕСІНДІ

Кесінді – басы да, соңы да бар болатын түзудің бір бөлігі.

A нүктесі – кесіндінің басы.

B нүктесі – кесіндінің соңы.

ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУЛЕР

Параллель түзулер – бір жазықтықта жататын қиылыспайтын екі түзу.

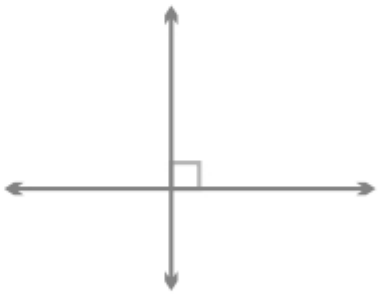
Түзулердің параллель екендігін көрсету үшін $\|$ символы қолданылады.

$a \| b$ өрнегі:

« a түзуі b түзуіне параллель» деп оқылады.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУЛЕР

Перпендикуляр түзулер – жазықтықта тік бұрыш жасап қиылысатын екі түзу.



Түзулердің перпендикуляр екендігін көрсету үшін $\perp$ символы қолданылады.

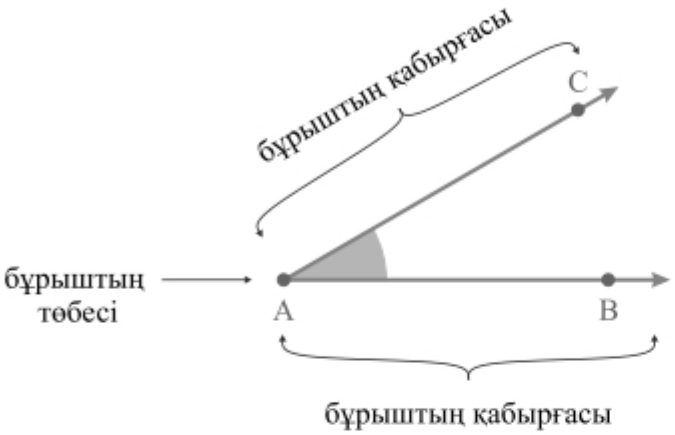
$a \perp b$ өрнегі:

« a түзуі b түзуіне перпендикуляр» деп оқылады.

© «EduCon» басылымдары

БҰРЫШ

Бұрыш – бір нүктеден шығатын екі сәулемен шектелген жазықтықтың бір бөлігі.



A нүктесі – бұрыштың төбесі.

AC және AB сәулелері – бұрыштың қабырғалары.

Бұрыштың белгіленуі: $\angle A$ немесе $\angle CAB$

Бұрыштарды өлшеу үшін градус немесе радиан қолданылады.

ЕСКЕРТУ

1 градус – толық айналымның $\frac{1}{360}$ бөлігі.

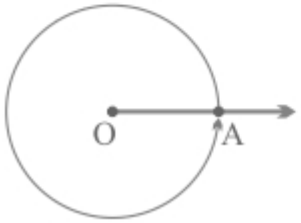
1 градус $= 1°$

$1° = 60'$ (минут)

$1' = 60''$ (секунд)

1 радиан $\approx 57°17'45''$

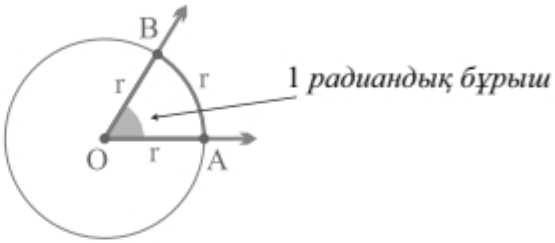
Сәуленің толық айналым жасауы:



ЕСКЕРТУ

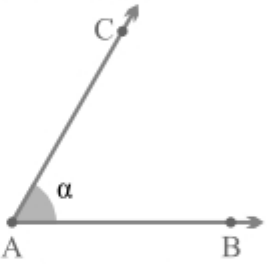
1 радиан – доғасының ұзындығы радиусқа тең болатын центрлік бұрыш.

1 радиан $\approx 57°17'45''$



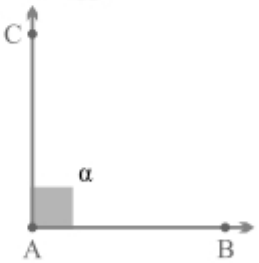
БҰРЫШТЫҢ ТҮРЛЕРІ

1) Сүйір бұрыш



$0° < \alpha < 90°$

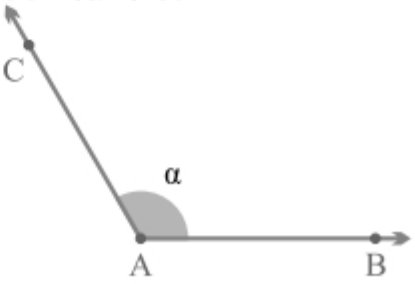
2) Тік бұрыш



$\alpha = 90°$

3) Доғал бұрыш

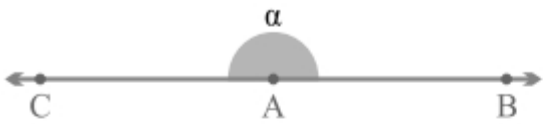
$90° < \alpha < 180°$



© «EduCon» басылымдары

4) Жазыңқы бұрыш

$\alpha = 180°$



5) Толық бұрыш

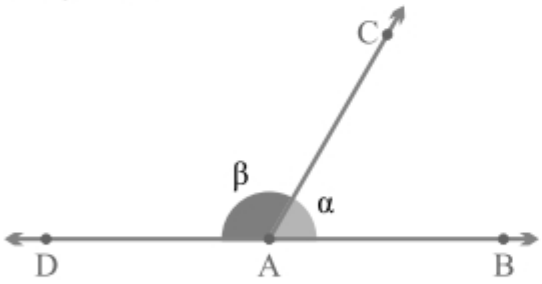
$\alpha = 360°$

СЫБАЙЛАС БҰРЫШТАР

Бір қабырғасы ортақ, ал қалған қабырғалары бір түзудің бойында жататын бұрыштар **сыбайлас бұрыштар** деп аталады.

Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.

$\alpha + \beta = 180°$

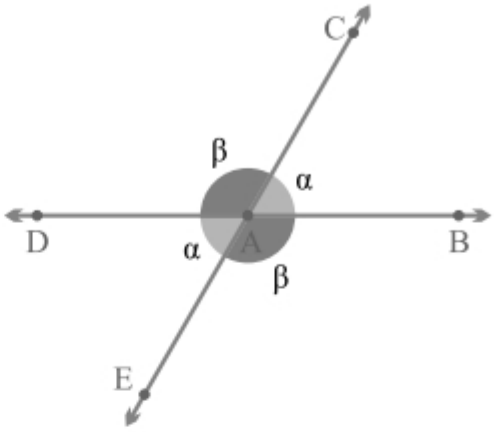


CAB және CAD – сыбайлас бұрыштар.

ВЕРТИКАЛЬ БҰРЫШТАР

Екі түзу қиылысқан кезде төрт бұрыш пайда болады. Бір-біріне қарама-қарсы жатқан бұрыштар **вертикаль бұрыштар** деп аталады.

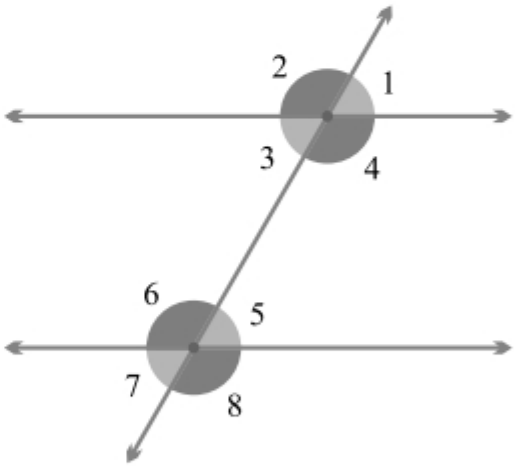
Вертикаль бұрыштар өзара тең.



CAB және DAE – вертикаль бұрыштар.

CAD және BAE – вертикаль бұрыштар.

ЕКІ ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУЛЕР МЕН ҚИЮШЫ АРҚЫЛЫ ПАЙДА БОЛҒАН БҰРЫШТАР



$\angle 1$ және $\angle 5$, $\angle 2$ және $\angle 6$,

$\angle 3$ және $\angle 7$, $\angle 4$ және $\angle 8$ – сәйкес бұрыштар

сәйкес бұрыштар өзара тең

$\angle 3$ және $\angle 5$, $\angle 4$ және $\angle 6$ – ішкі айқыш бұрыштар

ішкі айқыш бұрыштар өзара тең

© «EduCon» басылымдары

$\angle 1$ және $\angle 7$, $\angle 2$ және $\angle 8$ – сыртқы айқыш бұрыштар

сыртқы айқыш бұрыштар өзара тең

$\angle 3$ және $\angle 6$, $\angle 4$ және $\angle 5$ – ішкі тұстас бұрыштар

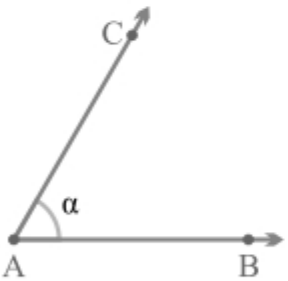
$$\angle 3+\angle 6=\angle 4+\angle 5=180^\circ$$

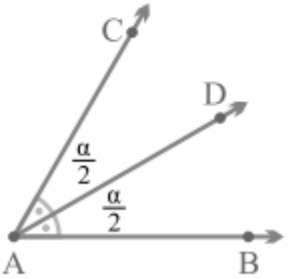
$\angle 1$ және $\angle 8$, $\angle 2$ және $\angle 7$ – сыртқы тұстас бұрыштар

$$\angle 1+\angle 8=\angle 2+\angle 7=180^\circ$$

БИССЕКТРИСА

Биссектриса – бұрыштың төбесінен шығып, оны қақ бөлетін сәуле.

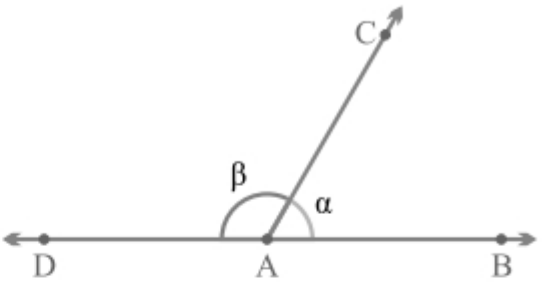


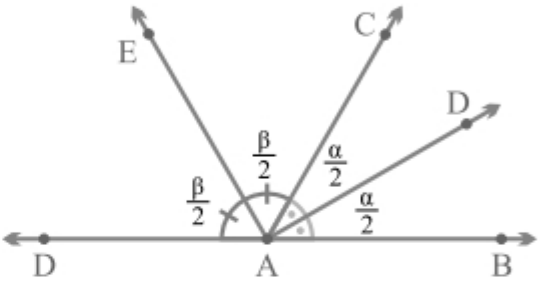


AD сәулесі – биссектриса.

$$\angle CAD=\angle DAB$$

Сыбайлас бұрыштардың биссектрисалары өзара перпендикуляр болады.

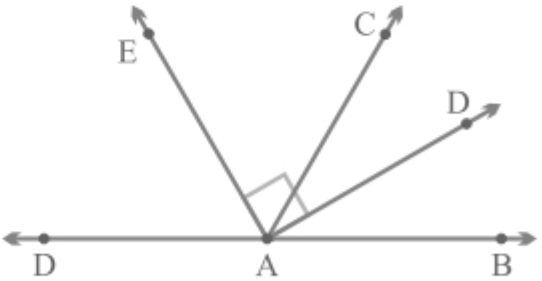




AD сәулесі – CAB бұрышының биссектрисасы.

AE сәулесі – CAD бұрышының биссектрисасы.

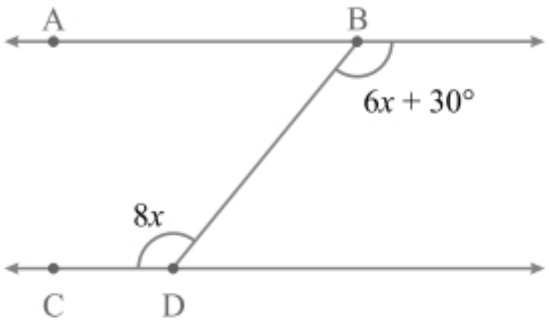
Сыбайлас бұрыштардың қосындысы $\alpha+\beta=180^\circ$ болғандықтан, екі биссектрисаның арасындағы бұрыш $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$ болады.



© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

$AB \parallel CD$. x-тің градустық өлшемін табыңыз.



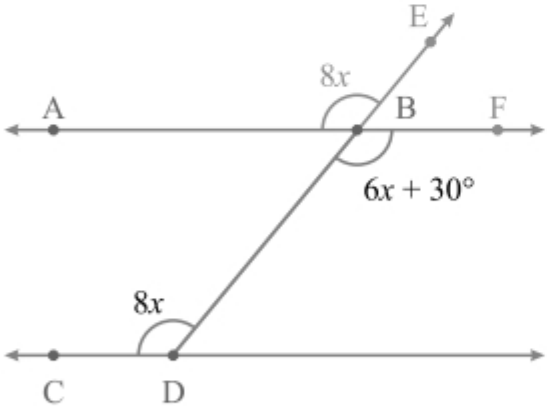
Шешімі:

CDB және ABE бұрыштары – сәйкес бұрыштар.

$\angle CDB = \angle ABE$

ABE және DBF – вертикаль бұрыштар.

$\angle ABE = \angle DBF$



$8x = 6x + 30°$

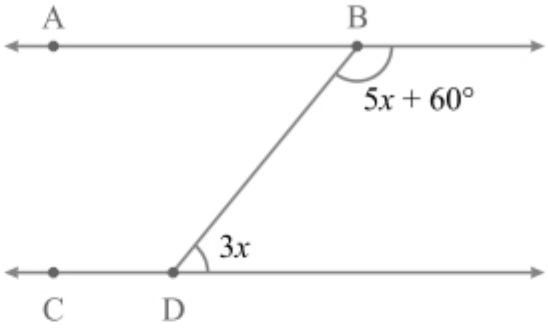
$2x = 30°$

$x = 15°$

Жауабы: 15°.

Мысал 2

$AB \parallel CD$. x-тің градустық өлшемін табыңыз.



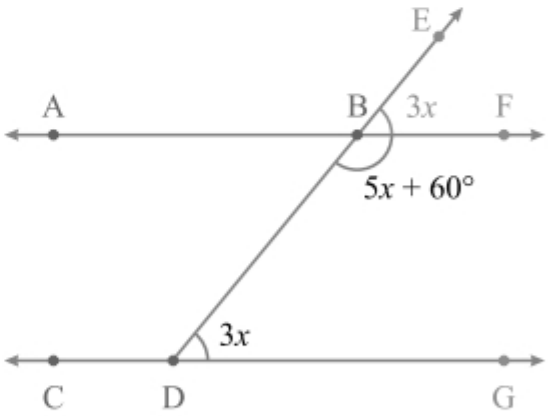
Шешімі:

BDG және EBF бұрыштары – сәйкес бұрыштар.

$\angle BDG = \angle EBF$

EBF және DBF бұрыштары – сыбайлас бұрыштар.

$\angle EBF + \angle DBF = 180°$



$3x + 5x + 60° = 180°$

$8x = 120°$

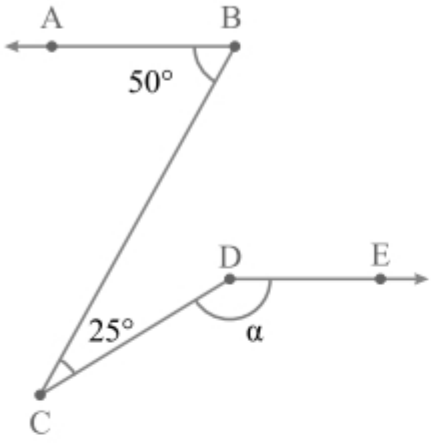
$x = 15°$

Жауабы: 15°.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

BA ∥ DE. α-ның градустық өлшемін табыңыз.



Шешімі:

ABC және FBG бұрыштары – вертикаль бұрыштар

$\angle ABC = \angle FBG$

FBG және FCH бұрыштары – сәйкес бұрыштар.

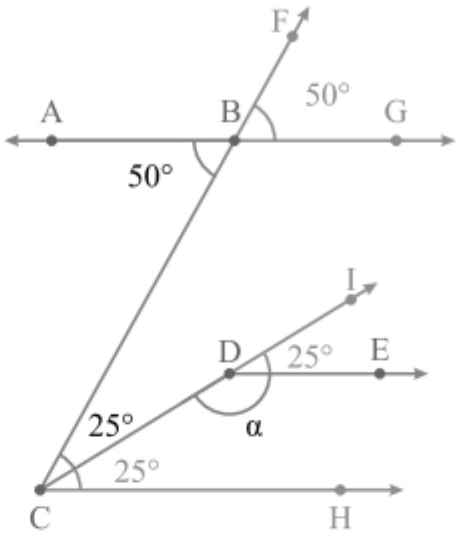
$\angle FBG = \angle FCH$

ICH және IDE бұрыштары – сәйкес бұрыштар.

$\angle ICH = \angle IDE$

IDE және CDE бұрыштары – сыбайлас бұрыштар.

$\angle IDE + \angle CDE = 180°$



$\alpha + 25° = 180°$

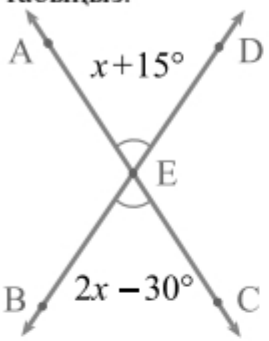
$\alpha = 155°$

Жауабы: $155°$.

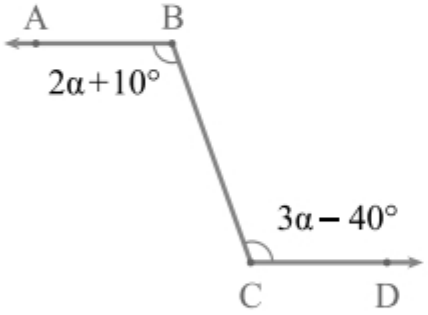
© «EduCon» басылымдары

Есептер

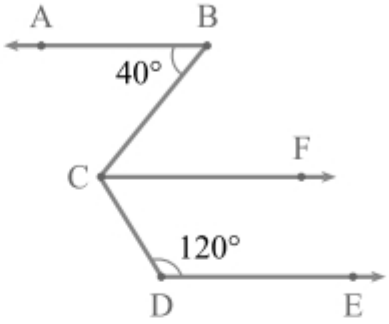
1. DEC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



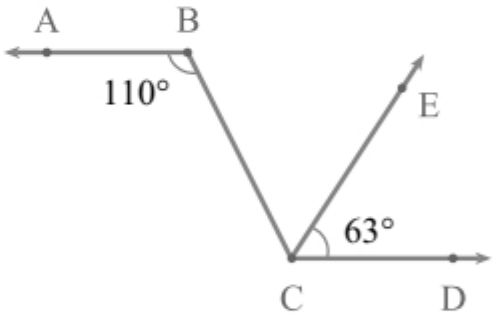
2. BA ∥ CD. ABC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



3. BA ∥ CF ∥ DE. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

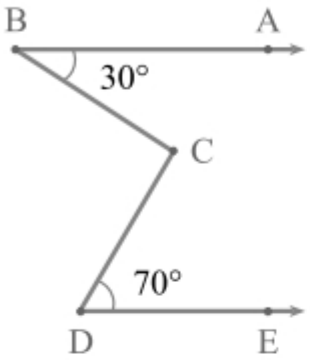


4. BA ∥ CD. BCE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

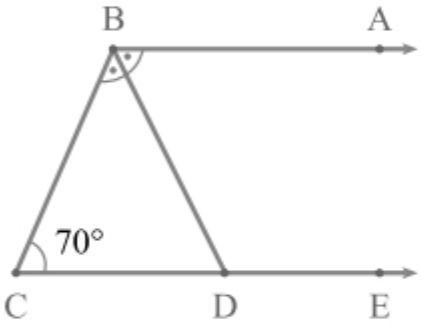


© «EduCon» басылымдары

5. BA ∥ DE. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

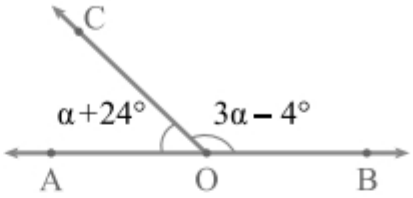


6. BA ∥ CD. BDE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

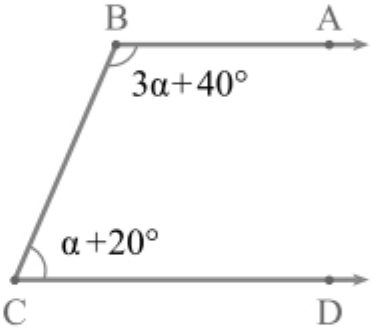


7. Сыбайлас бұрыштардың біреуі екіншісінен үш есе кем. Әр бұрыштың градустық өлшемдерін табыңыз.

8. AOC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



9. BA ∥ CD. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



10. OS сәулесі AOB бұрышын біріншісі екіншісінен екі есе үлкен болатын екі бұрышқа бөледі. Егер $\angle AOB = 78^\circ$ болса, онда әр бұрыштың градустық өлшемдерін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

11. OC сәулесі AOB бұрышын екі бұрышқа бөледі. Егер $\angle AOB = 132^\circ$ және AOC бұрышы COB бұрышынан 30°-қа артық болса, онда әр бұрыштың градустық өлшемдерін табыңыз.

12. OK сәулесі BOC бұрышын екі бұрышқа бөледі. Егер $\angle BOC = 160^\circ$ және BOK пен KOC бұрыштарының айырмасы 24° болса, онда әр бұрыштың градустық өлшемдерін табыңыз.

13. OB сәулесі AOC бұрышын екі бұрышқа бөледі. Егер $\angle AOC = 150^\circ$ және AOB бұрышы BOC бұрышынан 10°-қа кем болса, онда AOB бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

14. OC сәулесі AOB тік бұрышын екі бұрышқа бөледі. Қабырғалары AOC және COB бұрыштарының биссектрисасы болатын бұрыштың градустық өлшемін табыңыз.

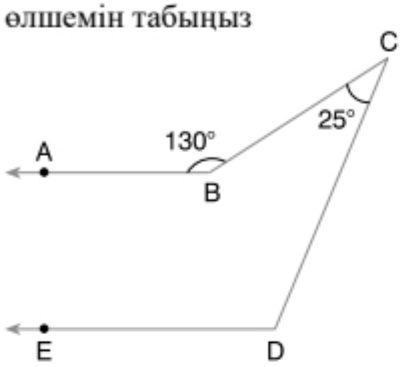
15. OF және OE сәулелері AOB жазыңқы бұрышты AOF, FOE және EOB бұрыштарына бөледі. Егер $\angle AOE = \angle BOF$ және $\angle AOF = 30^\circ$ болса, онда FOE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

16. OC сәулесі AOB бұрышын екі бұрышқа бөледі. Егер $\angle AOB = 120^\circ$ және пайда болған екі бұрыштың айырмасы олардың қосындысынан төрт есе кіші болса, онда осы бұрыштардың градустық өлшемдерін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

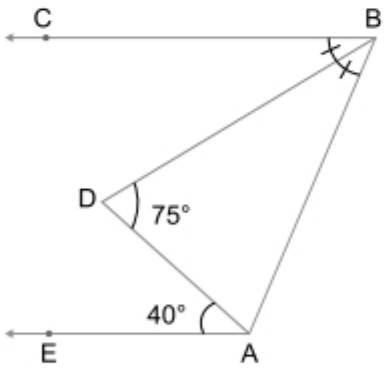
ТЕСТ №1

1. BA || DE. EDC бұрышының градустық өлшемін табыңыз



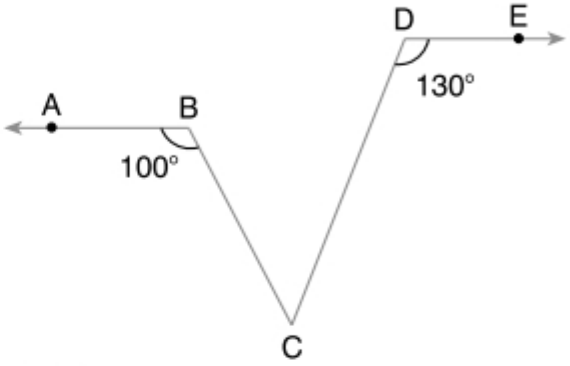
A) 125°
B) 115°
C) 135°
D) 95°
E) 105°

2. AE || BC. DAB бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



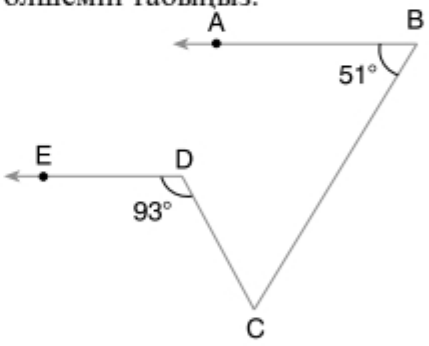
A) 25°
B) 70°
C) 35°
D) 65°
E) 80°

3. BA || DE. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 80°
B) 50°
C) 60°
D) 40°
E) 70°

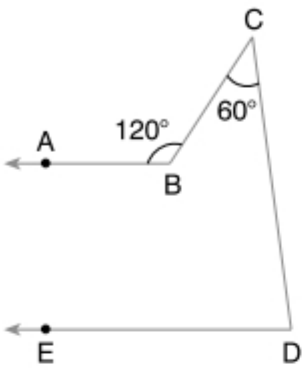
4. BA || DE. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 42°
B) 52°
C) 87°
D) 34°
E) 51°

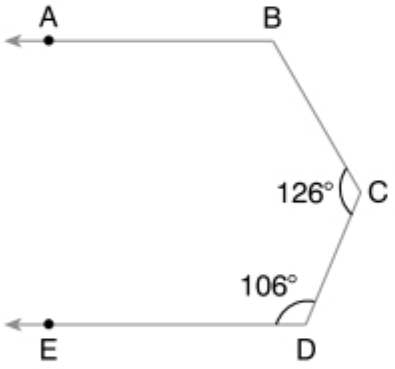
© «EduCon» басылымдары

5. BA || DE. CDE бұрышының мәнін табыңыз.



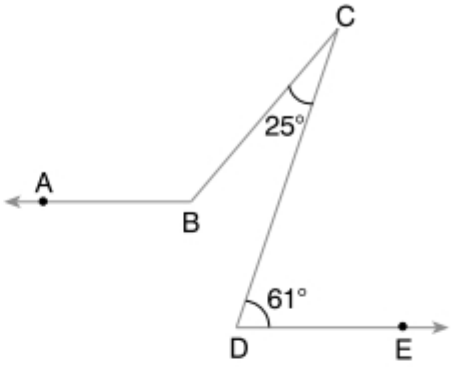
A) 60°
B) 50°
C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi}{3}$
E) 30°
F) $\frac{\pi}{6}$
G) 45°
H) 35°

6. BA || DE. ABC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



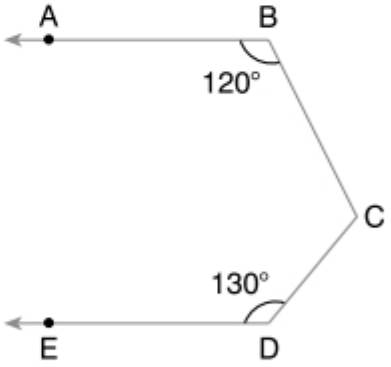
A) 118°
B) 114°
C) 128°
D) 116°
E) 126°

7. BA || DE. ABC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 154°
B) 132°
C) 124°
D) 144°
E) 116°

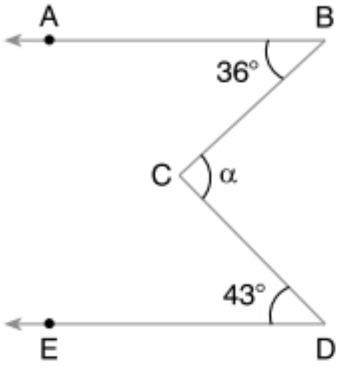
8. BA || DE. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 50°
B) 110°
C) 140°
D) 60°
E) 120°

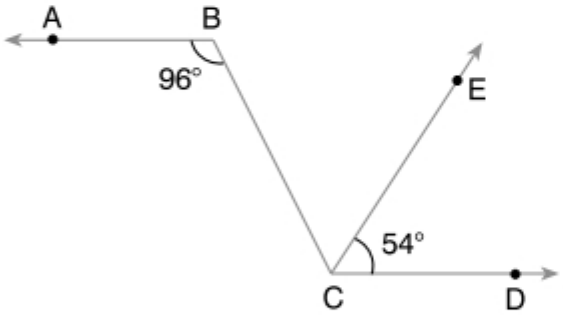
© «EduCon» басылымдары

9. BA || DE. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



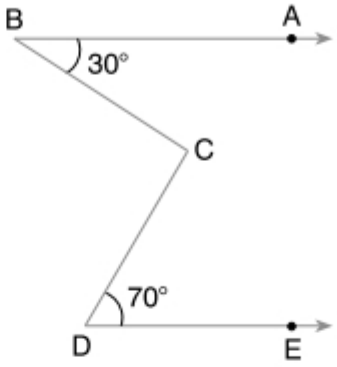
A) 79°
B) 84°
C) 47°
D) 89°
E) 48°

10. BA || CD. BCE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



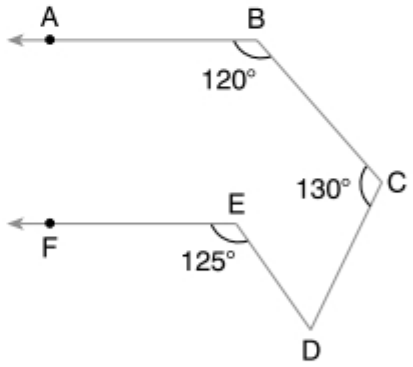
A) 42°
B) 36°
C) 84°
D) 32°
E) 44°

11. BA || DE. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 120°
B) 130°
C) 110°
D) 100°
E) 140°

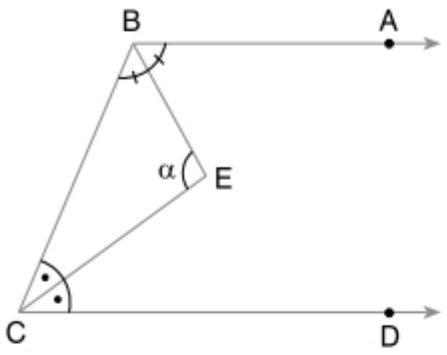
12. BA || EF. CDE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 35°
B) 55°
C) 70°
D) 65°
E) 45°

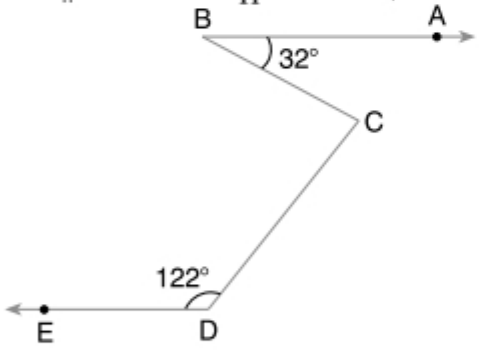
© «EduCon» басылымдары

13. BA || CD. BEC бұрышының мәнін табыңыз.



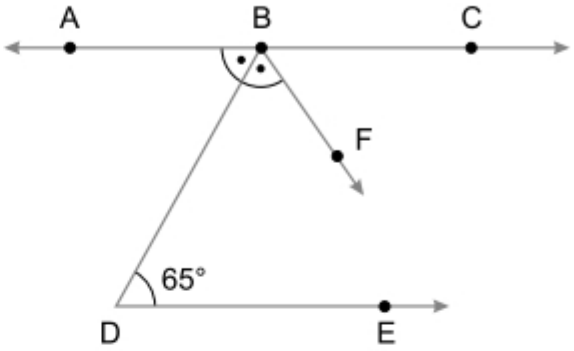
A) 120°
B) 60°
C) 150°
D) $\frac{\pi}{3}$
E) 100°
F) $\frac{2\pi}{3}$
G) 90°
H) 45°

14. BA || DE. BCD бұрышының мәнін табыңыз.



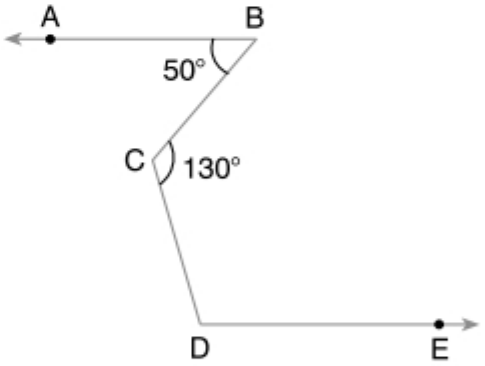
A) 60°
B) 90°
C) 70°
D) $\frac{\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{2}$
F) $\frac{\pi}{6}$
G) 30°
H) 45°

15. AC || DE. ABF бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 120°
B) 115°
C) 150°
D) 130°
E) 140°

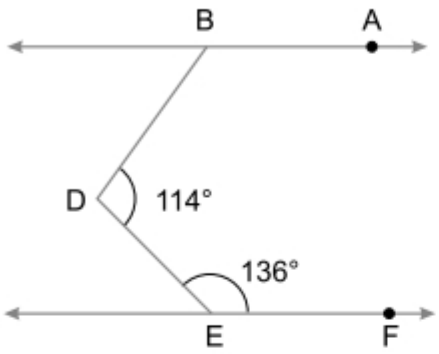
16. BA || DE. CDE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 120°
B) 90°
C) 60°
D) 100°
E) 50°

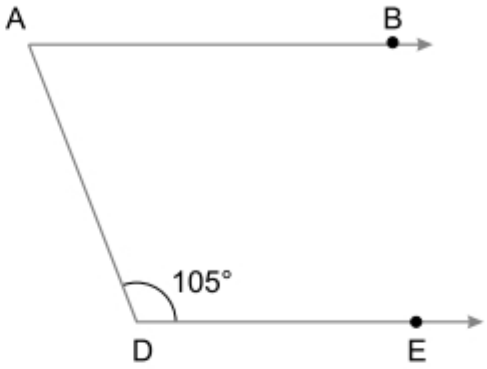
© «EduCon» басылымдары

17. BA || EF. ABD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 100°
B) 120°
C) 66°
D) 110°
E) 44°

18. AB || DE. DAB бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

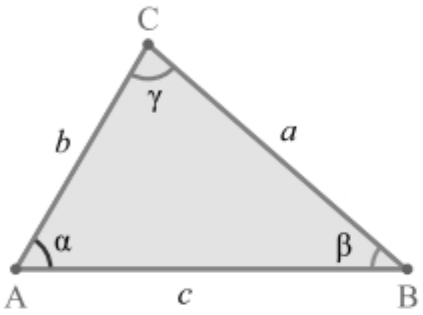


A) 85°
B) 60°
C) 120°
D) 75°
E) 25°

© «EduCon» басылымдары

ҮШБҰРЫШ

Үшбұрыш – бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте мен сол нүктелерді бір-бірімен қосатын үш кесіндіден тұратын фигура.



A, B және C нүктелері – үшбұрыштың төбелері. Төбелері A, B және C болатын үшбұрыш ΔABC деп белгіленеді.

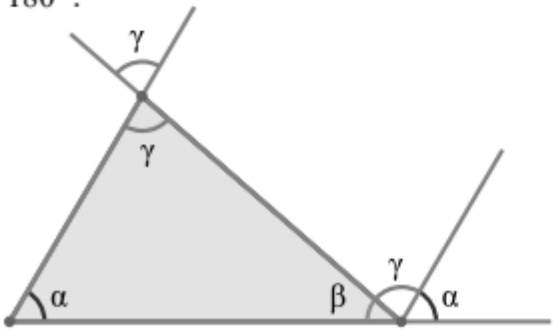
AB, BC және AC кесінділері – үшбұрыштың қабырғалары.

α, β және γ – үшбұрыштың ішкі бұрыштары.

α және β бұрыштары – AB қабырғасына іргелес бұрыштар.

γ бұрышы – AB қабырғасына қарсы жатқан бұрыш.

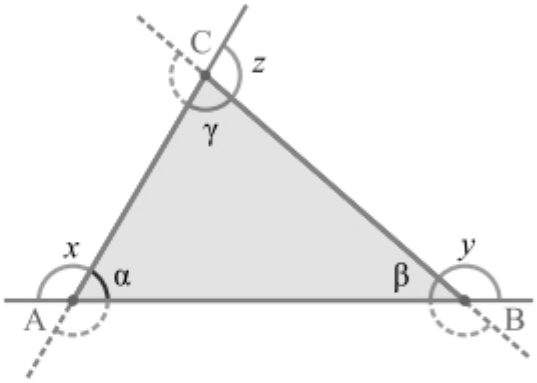
Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $180°$:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Үшбұрыштың ішкі бұрыштарымен сыбайлас бұрыштар сыртқы бұрыштар деп аталады.

Үшбұрыштың әр төбесінде 2 сыртқы бұрыш болады.



x, y және z – үшбұрыштың сыртқы бұрыштары.
Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының қасиеті:

1. Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысы $360°$.
   (әр төбеден бір сыртқы бұрыш алғанда)

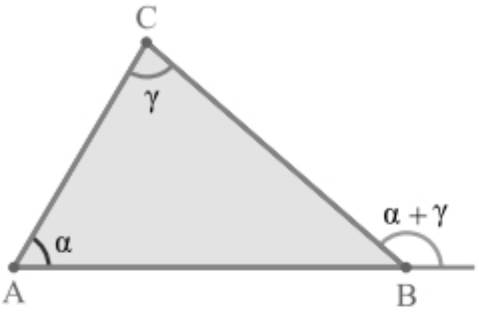
$$x + y + z = 360°$$

2. Үшбұрыштың бір төбесіндегі ішкі және сыртқы бұрыштарының қосындысы $180°$.
   (сыбайлас бұрыштар)

$$\alpha + x = \beta + y = \gamma + z = 180°$$

© «EduCon» басылымдары

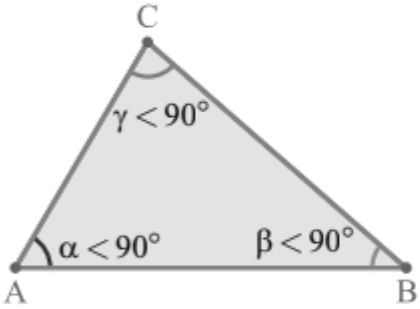
3. Үшбұрыштың әрбір сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес екі ішкі бұрыштардың қосындысына тең.



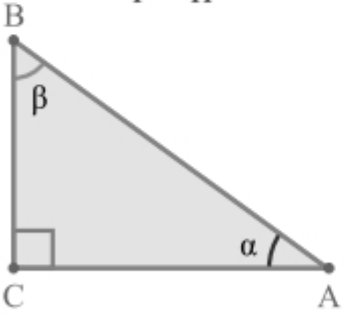
ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ТҮРЛЕРІ

Үшбұрыштың бұрыштарына байланысты түрлері:

1) Сүйір бұрышты үшбұрыш – үш бұрышы да сүйір болатын үшбұрыш.

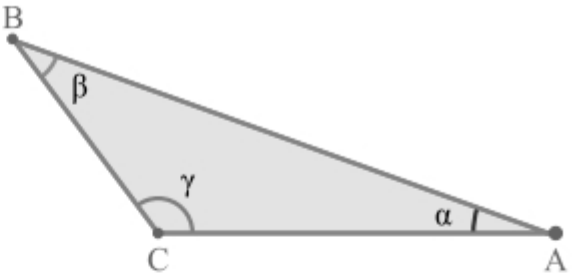


2) Тікбұрышты үшбұрыш – бір бұрышы тік болатын үшбұрыш.



$\alpha + \beta = 90°$

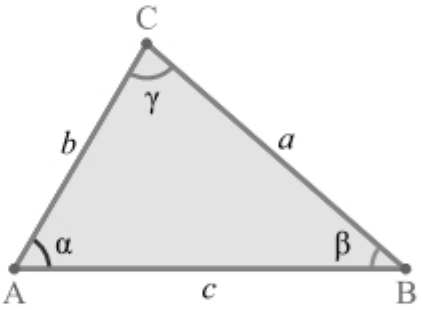
3) Доғал бұрышты үшбұрыш – бір бұрышы доғал болатын үшбұрыш.



$\gamma > 90°$

Үшбұрыштың қабырғаларына байланысты түрлері:

1) Әр түрлі қабырғалы үшбұрыш – қабырғаларының ұзындықтары әр түрлі болатын үшбұрыш.

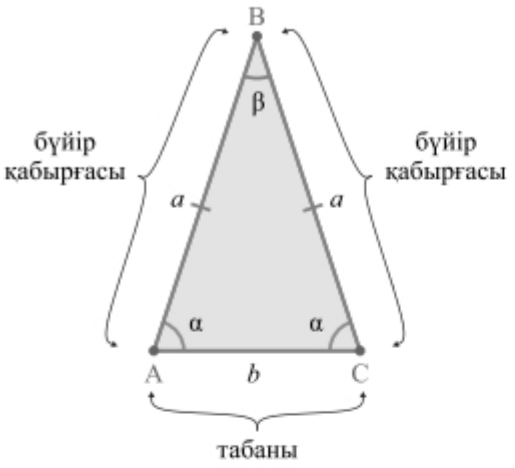


Егер $c > b > a$ болса, онда $\gamma > \beta > \alpha$.

Үлкен қабырғаға қарсы үлкен бұрыш жатады және керісінше үлкен бұрышқа қарсы үлкен қабырға жатады.

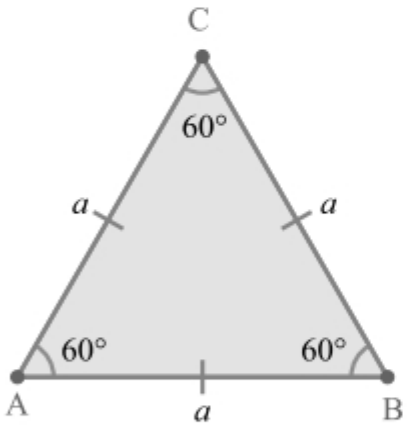
© «EduCon» басылымдары

2) Теңбүйірлі үшбұрыш – **екі қабырғасы тең болатын үшбұрыш.**



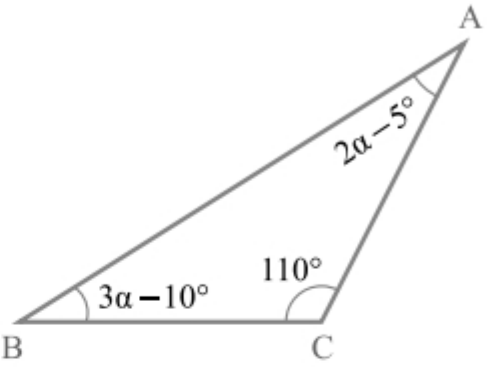
Егер $BA = BC$ болса, онда $\angle A = \angle C$.

3) Теңқабырғалы үшбұрыш (дұрыс үшбұрыш) – **барлық қабырғалары өзара тең болатын үшбұрыш.**

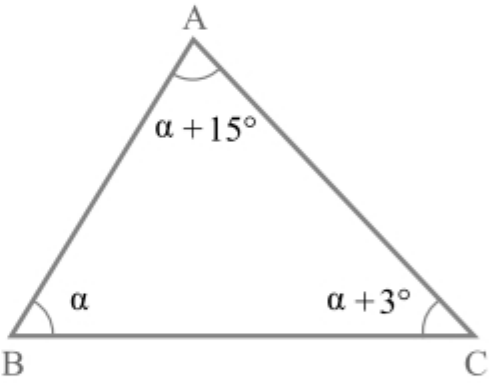


Есептер

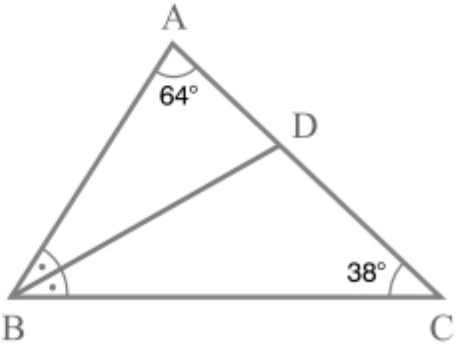
1. ABC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



2. BCA бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

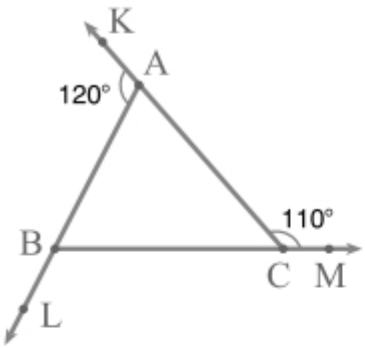


3. BD кесіндісі – биссектриса. BDC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

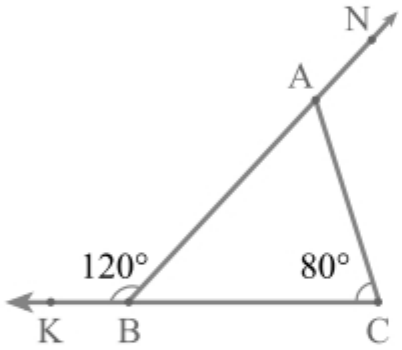


© «EduCon» басылымдары

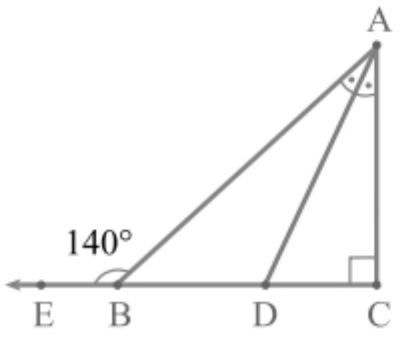
4. MBL бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



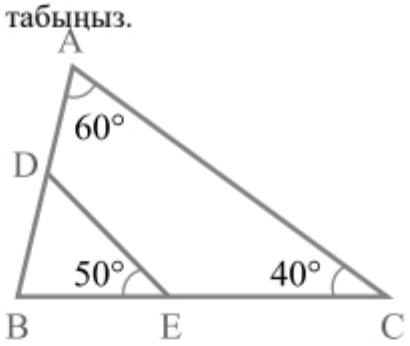
5. CAN бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



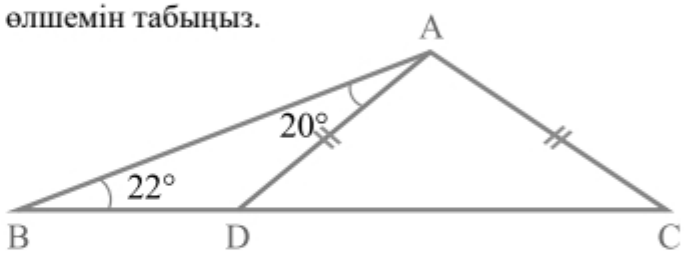
6. AD кесіндісі – биссектриса. $AC \perp EC$. ADC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



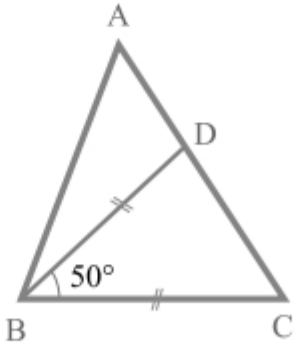
7. ADE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



8. $AD = AC$. BAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

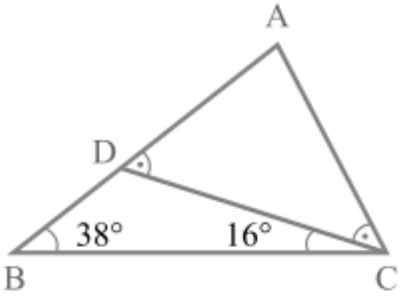


9. $BD = BC$. BDA бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

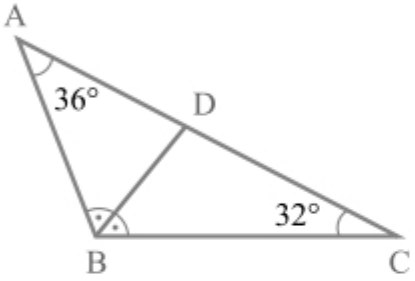


© «EduCon» басылымдары

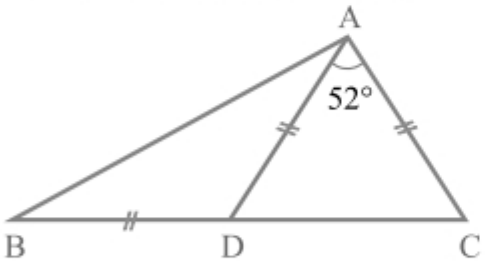
10. $\angle ADC = \angle ACD$. BAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



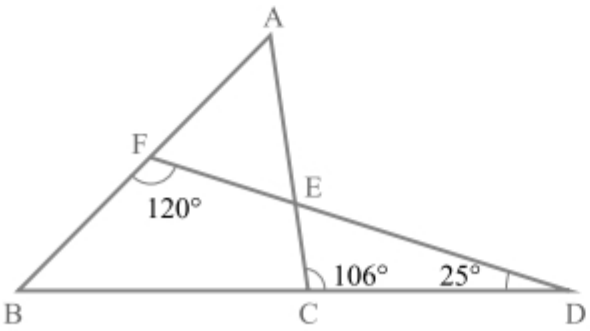
11. BD кесіндісі – биссектриса. BDA бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



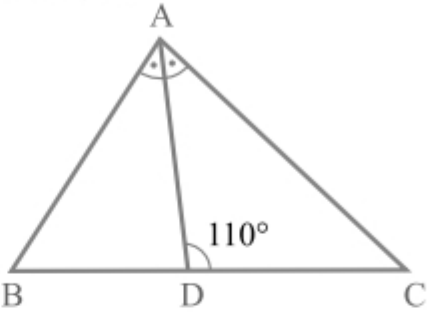
12. $AD = AC = BD$. BAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



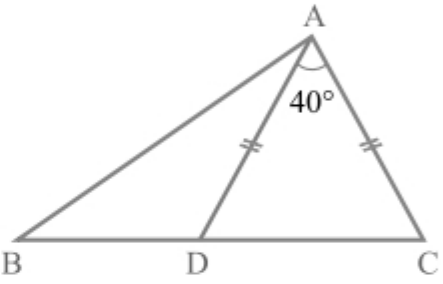
13. BAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



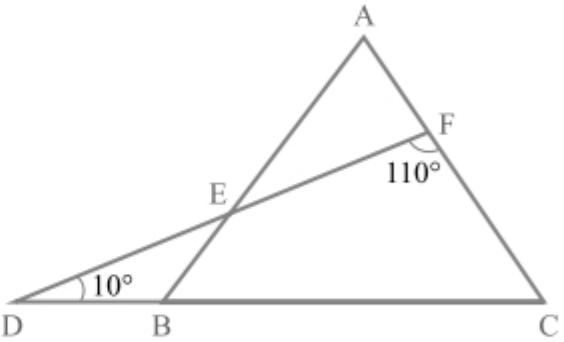
14. AD кесіндісі – биссектриса. $AB = AD$. ACB бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



15. $AD = AC$, $BA = BC$. ABC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.

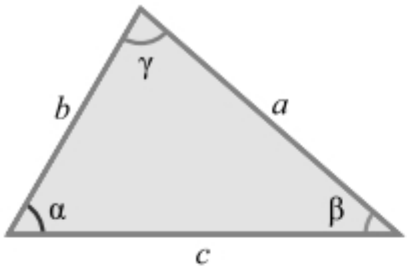


16. $AB = AC$. DEB бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

ҮШБҰРЫШ ТЕҢСІЗДІГІ

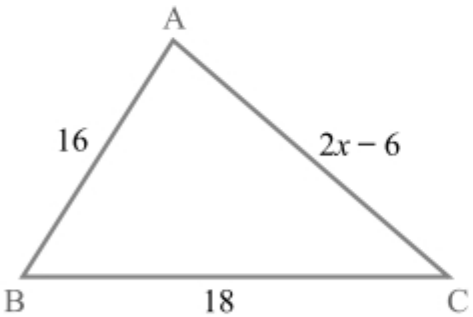


Үшбұрыштың кез келген қабырғасы басқа екі қабырғасының қосындысынан кіші, ал азайтындысының модулінен үлкен болады:

$$|a-b|<c<a+b$$
$$|a-c|<b<a+c$$
$$|b-c|<a<b+c$$

Мысал 1

ABC үшбұрышы берілген. AC қабырғасының ең үлкен бүтін мәнін табыңыз.



Шешімі:

$|18-16|<2x-6<18+16$

$|2|<2x-6<34$

$8<2x<40 \quad |:2$

$4<x<20$

Егер $x=19$ болса, онда

$AC=2x-6=38-6=32.$

Егер $x=19{,}5$ болса, онда

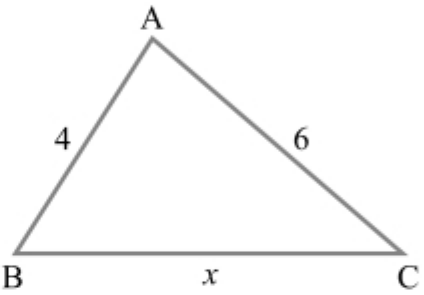
$AC=2x-6=39-6=33.$

AC қабырғасының ең үлкен бүтін мәні 33-ке тең.

Жауабы: 33.

Мысал 2

ABC үшбұрышы берілген. x-тің ең кіші бүтін мәнін табыңыз.



Шешімі:

$|6-4|<x<6+4$

$|2|<x<10$

$2<x<10$

Барлық бүтін шешімдер $x=\{3;4;5;6;7;8;9\}$.

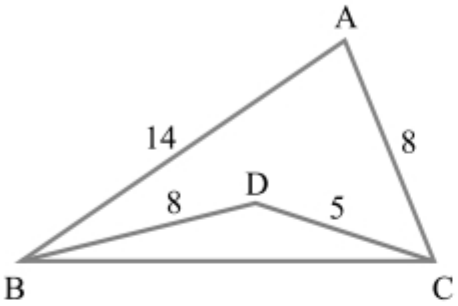
Ең кіші бүтін шешім $x=3$.

Жауабы: 3.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

ABC және DBC үшбұрыштары берілген. ABC үшбұрышының периметрінің ең үлкен бүтін мәнін табыңыз.



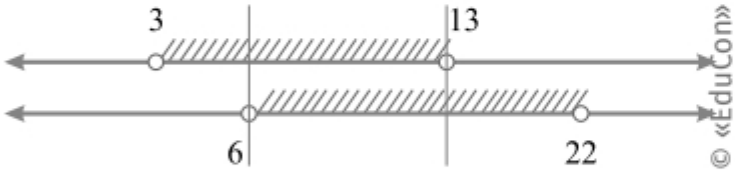
Шешімі:

DBC үшбұрышы үшін: ABC үшбұрышы үшін:

$|8-5| < BC < 8+5$

$|14-8| < BC < 14+8$

$3 < BC < 13$ $6 < BC < 22$



$6 < BC < 13$

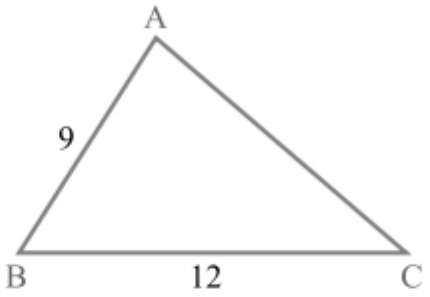
BC қабырғасының ең үлкен бүтін мәні 12-ге тең. ABC үшбұрышының периметрінің ең үлкен бүтін мәні $P_{ABC} = 14+8+12 = 34$.

Жауабы: 34.

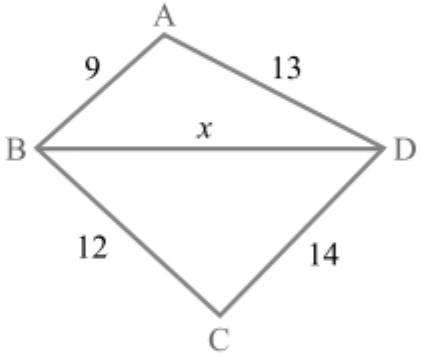
© «EduCon» басылымдары

Есептер

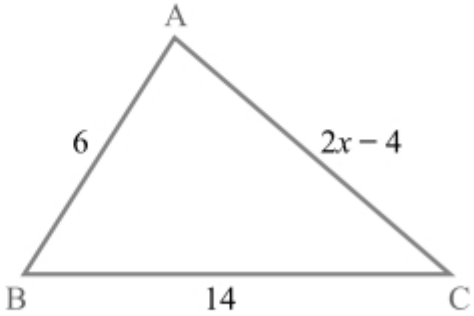
1. ABC үшбұрышы берілген. AC қабырғасының ең кіші бүтін мәнін табыңыз.



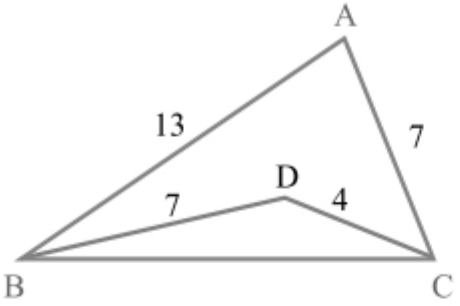
2. ABCD төртбұрышы берілген. x-тің ең кіші бүтін және ең үлкен бүтін шешімдерінің қосындысын табыңыз.



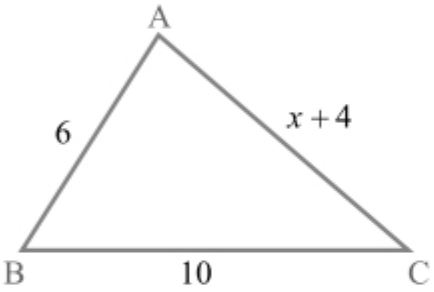
3. ABC үшбұрышы берілген. x-тің барлық бүтін мәндерінің санын табыңыз.



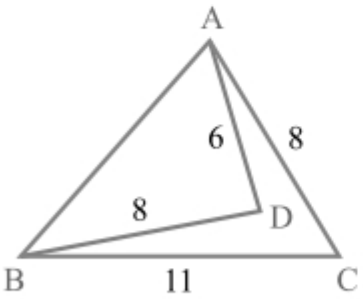
4. ABC және DBC үшбұрыштары берілген. DBC үшбұрышының периметрінің ең кіші бүтін мәнін табыңыз.



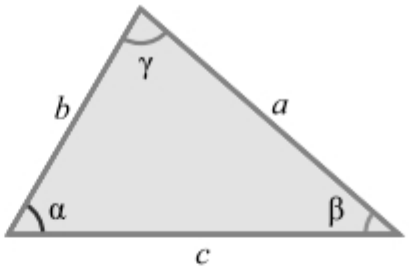
5. ABC үшбұрышы берілген. AC қабырғасының ең үлкен бүтін мәнін табыңыз.



6. ABC және ABD үшбұрыштары берілген. ABC үшбұрышының периметрінің ең үлкен бүтін мәнін табыңыз.



КОСИНУСТАР ТЕОРЕМАСЫ



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Косинустар теоремасы бойынша:

a) Егер $c^2 < a^2 + b^2$ болса, онда $\gamma < 90°$.

b) Егер $c^2 = a^2 + b^2$ болса, онда $\gamma = 90°$.

c) Егер $c^2 > a^2 + b^2$ болса, онда $\gamma > 90°$.

Косинустар теоремасы арқылы:

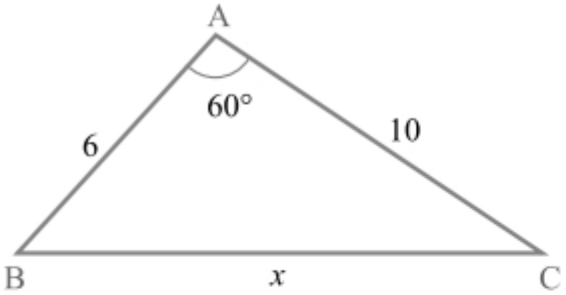
1. үшбұрыштың үш қабырғасы да белгілі болса, онда үшбұрыштың кез келген бұрышын табуға болады.

2. үшбұрыштың екі қабырғасы мен бір бұрышы белгілі болса, онда үшінші қабырғасын табуға болады.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 4

ABC үшбұрышы берілген. x-тің мәнін табыңыз.



Шешімі:

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 36 + 100 - 120 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 76$

$x = 2\sqrt{19}$

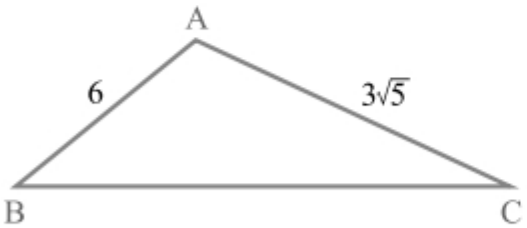
Жауабы: $2\sqrt{19}$.

Мысал 5

ABC үшбұрышы берілген. $\sin \angle A = \frac{2}{3}$, мұндағы

$\angle A$ – доғал бұрыш.

BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



Шешімі:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$

$\cos^2 \angle A = 1 - \sin^2 \angle A = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$\cos \angle A = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\angle A$ доғал бұрыш болғандықтан $\cos \angle A = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$BC^2 = 6^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$

$BC^2 = 36 + 45 + 60$

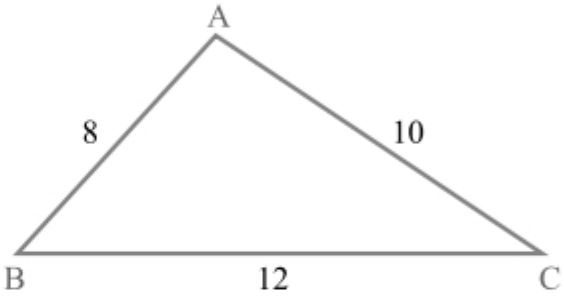
$BC^2 = 141$

$BC = \sqrt{141}$

Жауабы: $\sqrt{141}$.

Мысал 6

ABC үшбұрышы берілген. $\cos \angle B$ өрнегінің мәнін табыңыз.



Шешімі:

$10^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos \angle B$

$2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos \angle B = 8^2 + 12^2 - 10^2$

$\cos \angle B = \frac{8^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 12}$

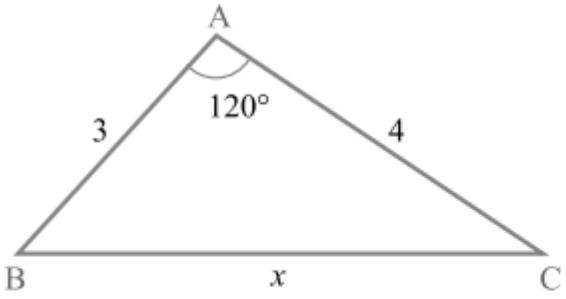
$\cos \angle B = \frac{9}{16}$

Жауабы: $\frac{9}{16}$.

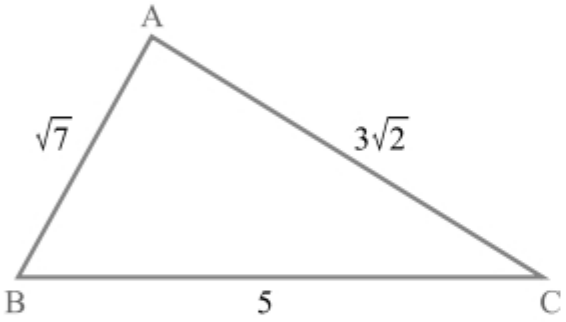
© «EduCon» басылымдары

Есептер

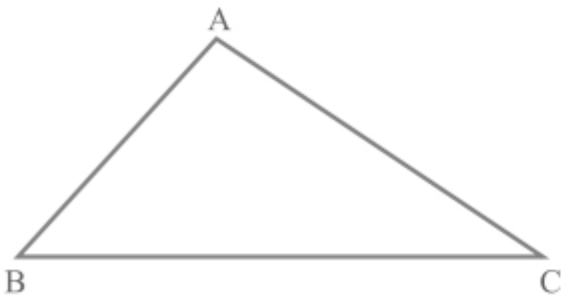
1. ABC үшбұрышы берілген. x-тің мәнін табыңыз.



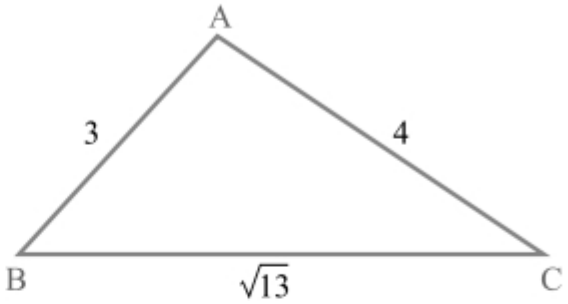
2. ABC үшбұрышы берілген. A бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



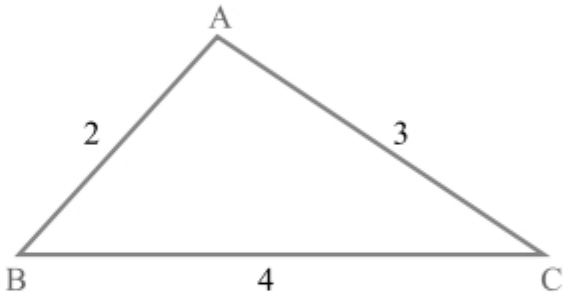
3. Үшбұрыштың бір қабырғасы 21 см, ал қалған екеуінің қатынасы 3:8 қатынасындай және араларындағы бұрыш 60°. Үшбұрыштың белгісіз қабырғаларын табыңыз.



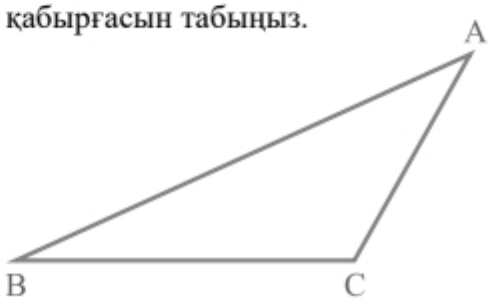
4. ABC үшбұрышы берілген. Үлкен бұрыштың синусын табыңыз.



5. ABC үшбұрышы берілген. Кіші бұрыштың косинусын табыңыз.

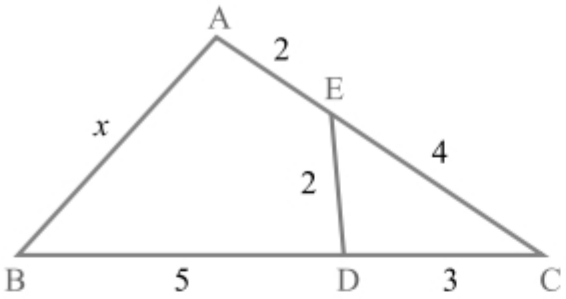


6. Үшбұрыштың табаны 12 см және табанына іргелес бұрыштың біреуі 120°, ал сол бұрышқа қарсы жатқан қабырғаның ұзындығы 28 см. Үшбұрыштың белгісіз қабырғасын табыңыз.

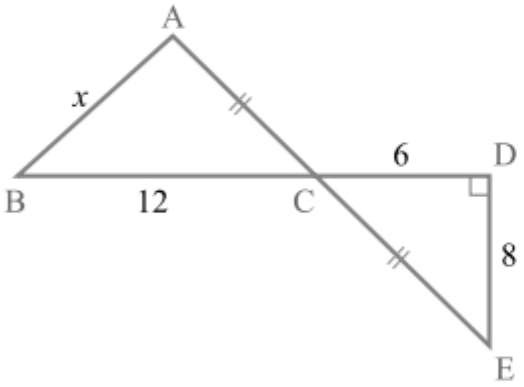


© «EduCon» басылымдары

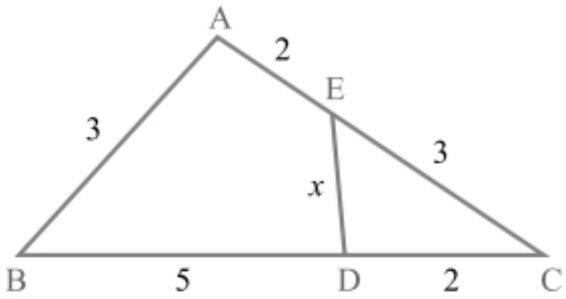
7. x-тің мәнін табыңыз.



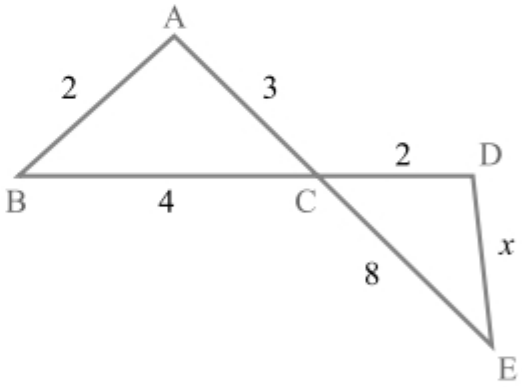
8. x-тің мәнін табыңыз.



9. x-тің мәнін табыңыз.

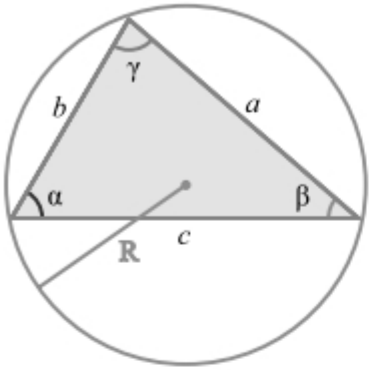


10. x-тің мәнін табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

СИНУСТАР ТЕОРЕМАСЫ



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Синустар теоремасы арқылы:

1. егер үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған қарсы жатқан бұрыш белгілі болса, онда үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табуға болады.

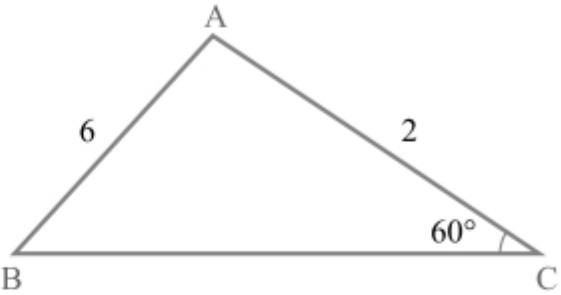
2. егер үшбұрыштың бір қабырғасы мен екі бұрышы белгілі болса, онда қалған белгісіз қабырғаларын табуға болады.

3. егер үшбұрыштың екі қабырғасы мен осы қабырғалардың біреуіне қарсы жатқан бұрыш белгілі болса, онда қалған белгісіз қабырға мен бұрыштарды табуға болады.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 7

ABC үшбұрышы берілген. $\sin\angle B$ өрнегінің мәнін табыңыз.



Шешімі:

$$\frac{6}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sin\angle B}$$

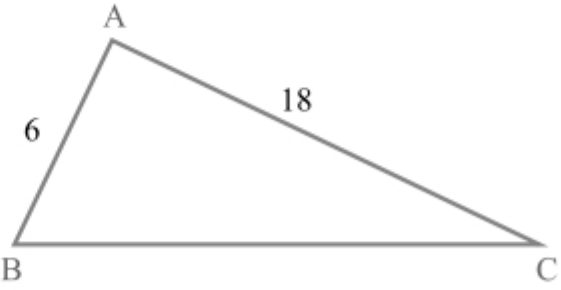
$$\sin\angle B=\frac{2}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\angle B=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Жауабы: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Мысал 8

ABC үшбұрышы берілген. $\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$ өрнегінің мәнін табыңыз.



Шешімі:

$$\frac{6}{\sin\angle C}=\frac{18}{\sin\angle B}$$

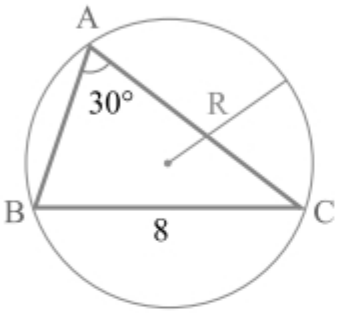
$$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{18}{6}$$

$$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=3$$

Жауабы: 3.

Мысал 9

ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



Шешімі:

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=2R$$

$$\frac{8}{\sin 30^\circ}=2R$$

$16=2R$

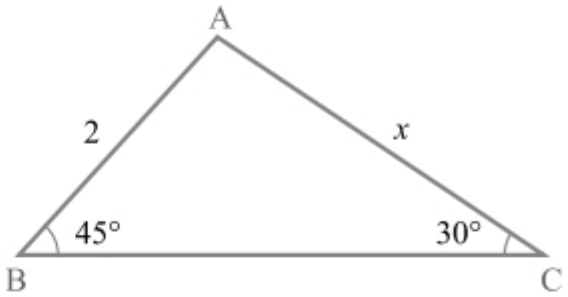
$R=8$

Жауабы: 8.

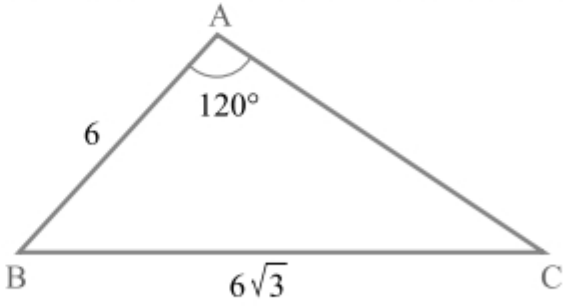
© «EduCon» басылымдары

Есептер

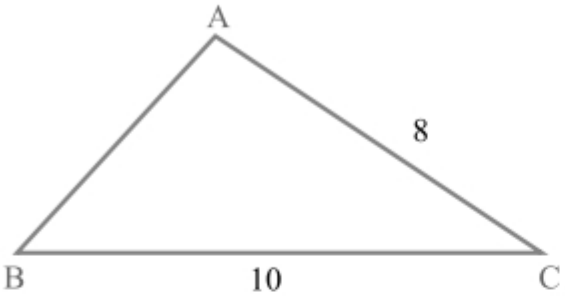
1. x-тің мәнін табыңыз.



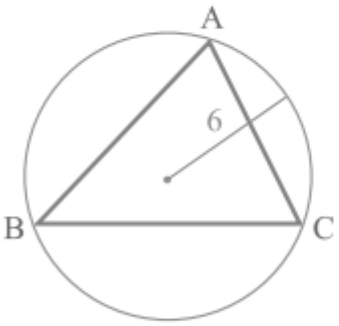
2. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



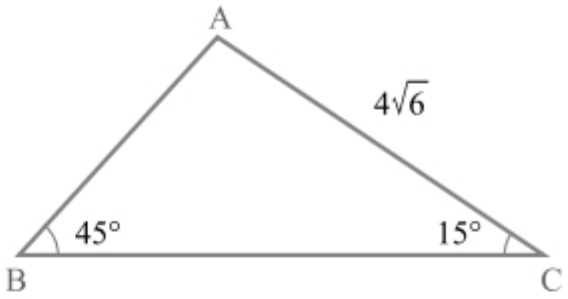
3. Егер $\cos\angle B = \frac{3}{5}$ болса, онда A бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



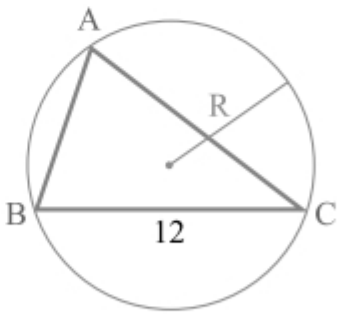
4. Егер $\sin\angle A = \frac{5}{6}$ болса, онда BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



5. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

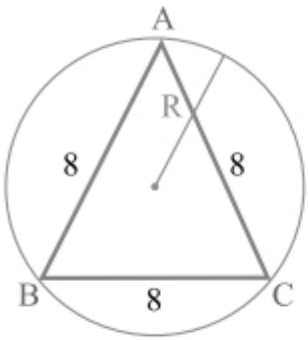


6. Егер $\sin\angle A = \frac{3}{4}$ болса, онда ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

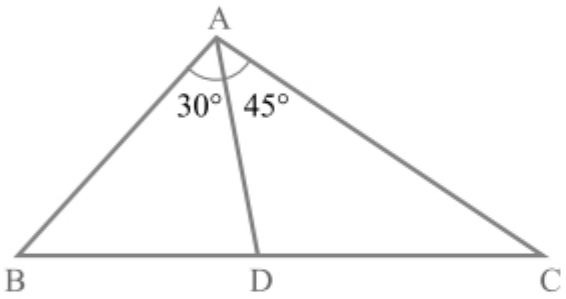


© «EduCon» басылымдары

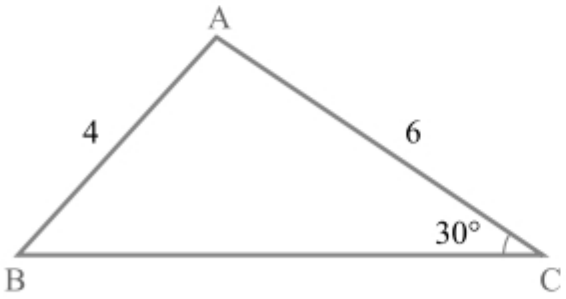
7. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



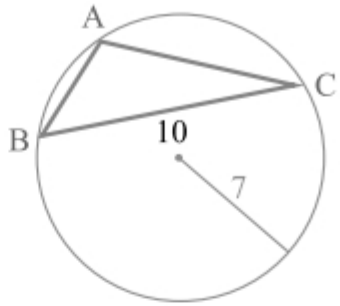
8. Егер $BD:DC=2:3$ болса, онда $\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$ өрнегінің мәнін табыңыз.



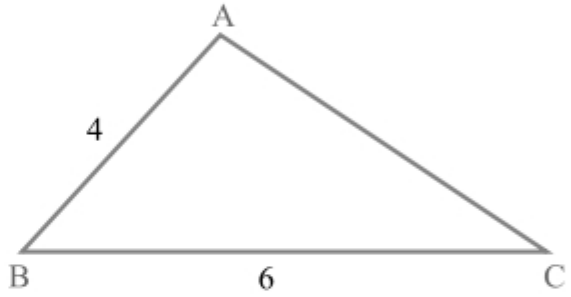
9. $\sin\angle B$ өрнегінің мәнін табыңыз.



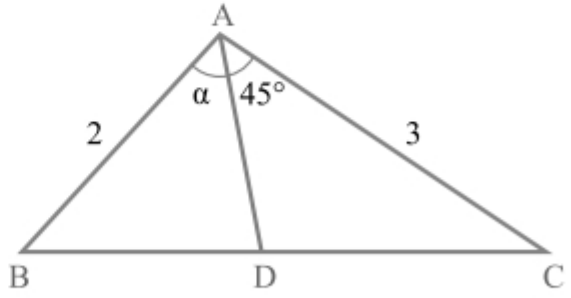
10. $\cos\angle A$ өрнегінің мәнін табыңыз.



11. Егер $\angle A=90°+\angle C$ болса, онда $\text{tg}\angle C$ өрнегінің мәнін табыңыз.



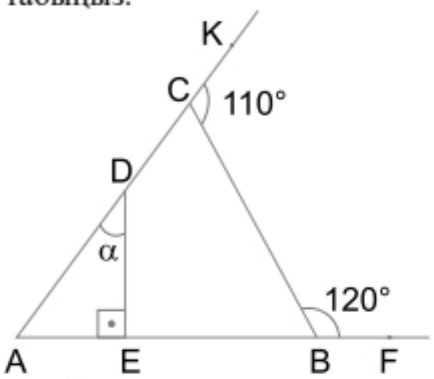
12. Егер $3BD=2DC$ болса, онда $\sin\alpha$. өрнегінің мәнін табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

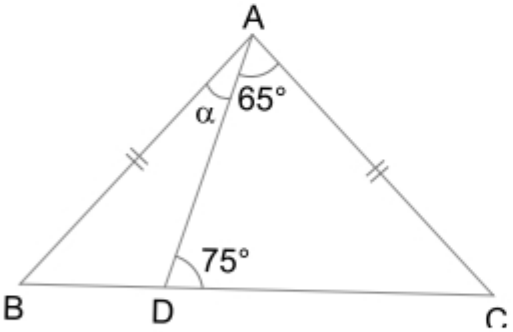
ТЕСТ №2

1. ADE бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



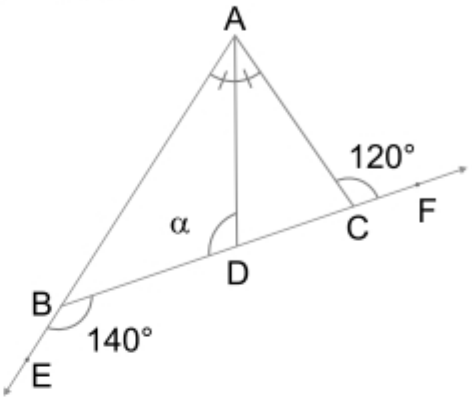
A) 60°
B) 30°
C) 50°
D) 40°
E) 20°

2. BAD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



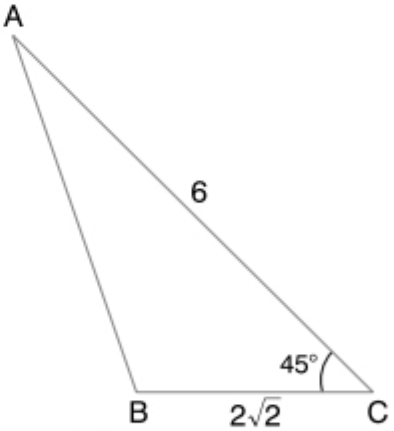
A) 50°
B) 40°
C) 55°
D) 35°
E) 45°

3. BDA бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 110°
B) 90°
C) 120°
D) 100°
E) 130°

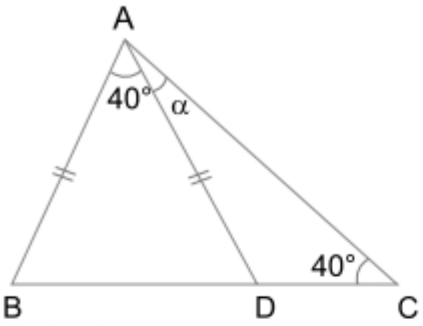
4. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) $3\sqrt{2}$ см
B) $4\sqrt{2}$ см
C) $5\sqrt{5}$ см
D) $3\sqrt{6}$ см
E) $2\sqrt{5}$ см

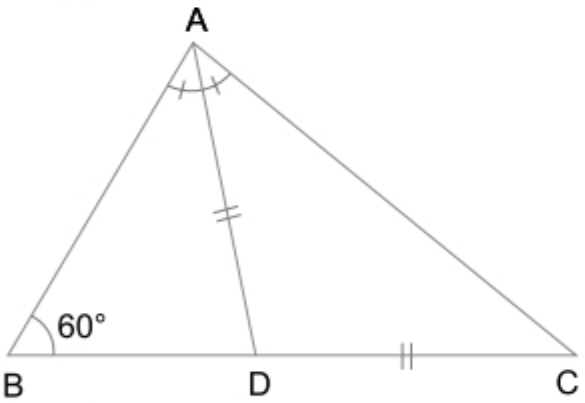
© «EduCon» басылымдары

5. DAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



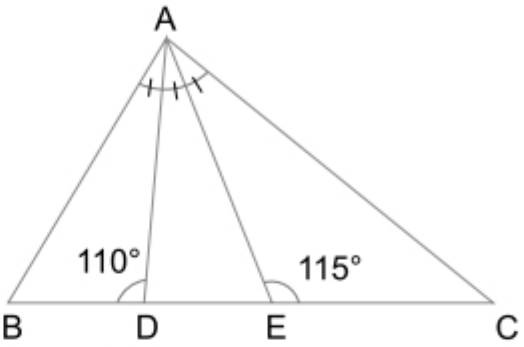
A) 50°
B) 40°
C) 30°
D) 20°
E) 10°

6. BAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



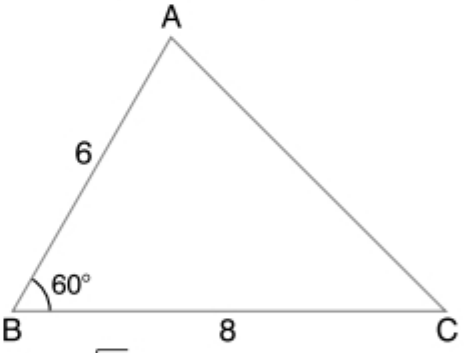
A) 80°
B) 40°
C) 60°
D) 30°
E) 90°

7. BAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



A) 135°
B) 125°
C) 140°
D) 115°
E) 45°

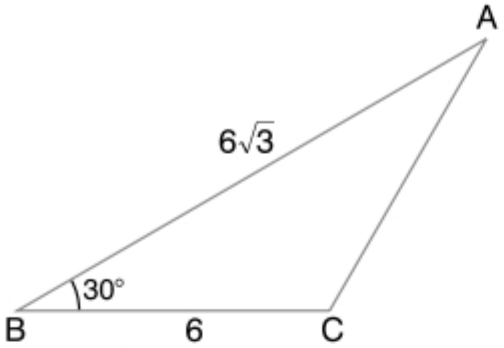
8. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) $2\sqrt{13}$ см
B) $4\sqrt{13}$ см
C) 10 см
D) $4\sqrt{3}$ см
E) 12 см

© «EduCon» басылымдары

9. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) $3\sqrt{3}$ см
B) 8 см
C) 6 см
D) $2\sqrt{3}$ см
E) 4 см

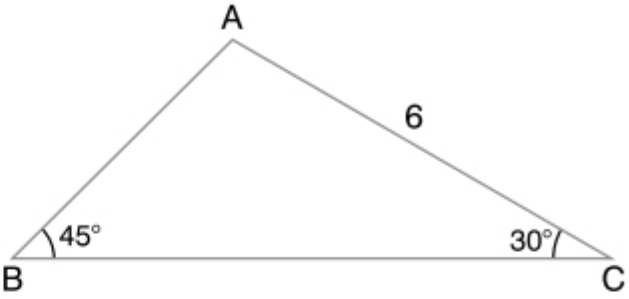
10. Үшбұрыштың қабырғалары 2 см, 4 см және 3 см. Кіші бұрыштың синусын табыңыз.

A) $\frac{\sqrt{15}}{10}$
B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
C) $\frac{\sqrt{7}}{6}$
D) $\frac{\sqrt{15}}{8}$
E) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

11. ABC үшбұрышында: $AB=12$ см және $\angle C=45°$. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

A) $6\sqrt{2}$ см
B) 6 см
C) $4\sqrt{2}$ см
D) $8\sqrt{2}$ см
E) $3\sqrt{2}$ см

12. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) 3 см
B) $3\sqrt{2}$ см
C) 4 см
D) $2\sqrt{2}$ см
E) 2 см

13. ABC үшбұрышында: AC=5 см, BC=6 см және $\angle C=60°$. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.

A) $2\sqrt{6}$ см
B) $\sqrt{31}$ см
C) 6 см
D) $2\sqrt{19}$ см
E) 7 см

14. ABC үшбұрышында: AB=6 см, $\angle A=30°$ және $\angle C=45°$. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

A) $2\sqrt{2}$ см
B) 4 см
C) 6 см
D) $3\sqrt{2}$ см
E) 3 см

© «EduCon» басылымдары

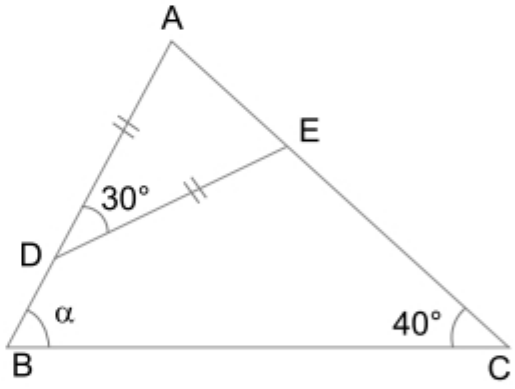
15. Үшбұрыштың қабырғалары 6 см, 6 см және 10 см. Үшбұрыштың түрін анықтаңыз.
A) Теңқабырғалы үшбұрыш
B) Сүйір бұрышты үшбұрыш
C) Теңбүйірлі үшбұрыш
D) Дұрыс үшбұрыш
E) Доғал бұрышты үшбұрыш
F) Әр түрлі қабырғалы үшбұрыш
G) Тікбұрышты үшбұрыш
H) Ондай үшбұрыш жоқ

16. Үшбұрыштың қабырғалары 10 см, 12 см және 8 см болса, бұрыштарының косинустарын табыңыз.

A) $\frac{3}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{9}{16}$
E) $\frac{1}{16}$
F) $\frac{1}{6}$
G) $\frac{1}{8}$
H) $\frac{4}{5}$

17. ABC үшбұрышында: AB=4 см, AC= $2\sqrt{15}$ және $\sin\angle A = \frac{1}{4}$. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.
A) $2\sqrt{17}$ см
B) 4 см
C) 8 см
D) $3\sqrt{34}$ см
E) $2\sqrt{34}$ см
F) 16 см
G) $5\sqrt{7}$ см
H) $6\sqrt{17}$ см

18. DBC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



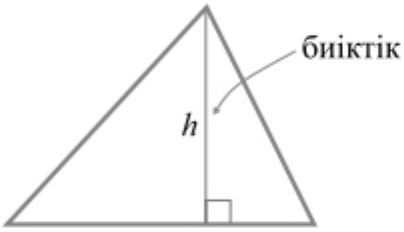
A) 45°
B) 65°
C) 55°
D) 75°
E) 60°

© «EduCon» басылымдары

БИІКТІК

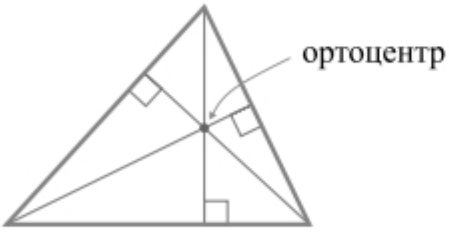
Биіктік – үшбұрыштың төбесінен оған қарсы жатқан қабырғаны қамтитын түзуге түсірілген перпендикуляр кесінді.

Жазықтық шексіз және шетсіз болады.

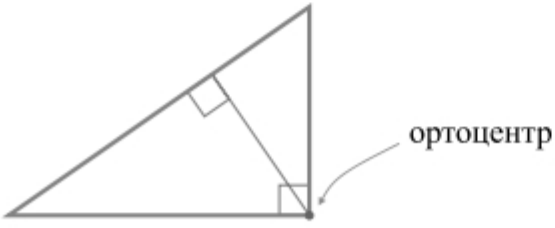


Үшбұрыштың биіктіктерін қамтитын түзулер бір нүктеде қиылысады. Ол нүкте **ортоцентр** деп аталады.

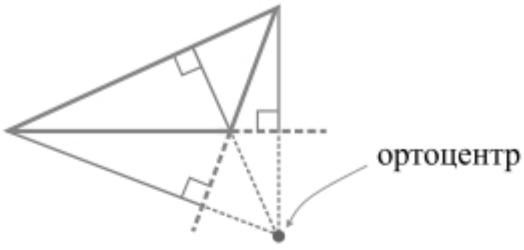
1. Сүйір бұрышты үшбұрыштың ортоцентрі үшбұрыштың ішінде орналасады:



2. Тікбұрышты үшбұрыштың ортоцентрі тік бұрыштың төбесімен сәйкес келеді:

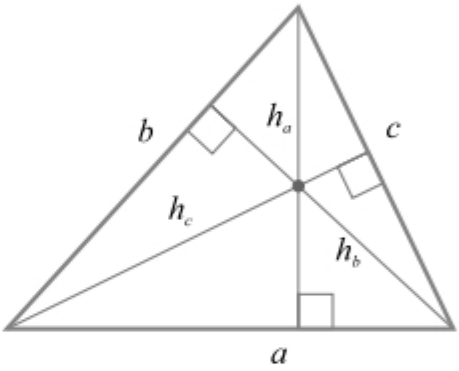


3. Доғал бұрышты үшбұрыштың ортоцентрі үшбұрыштың сыртында орналасады:



Биіктіктердің қасиеттері

Үшбұрыштың биіктіктері оның қабырғаларына кері пропорционал:



$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

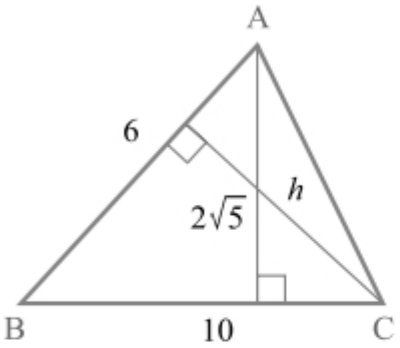
$$ah_a = bh_b = ch_c$$

© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

ABC үшбұрышында: $BC = 10$, $AB = 6$. Егер BC қабырғасына түсірілген биіктік $2\sqrt{5}$ болса, онда AB қабырғасына түсірілген биіктікті табыңыз.

Шешімі:



$$ah_a = bh_b$$

$$10 \cdot 2\sqrt{5} = 6 \cdot h$$

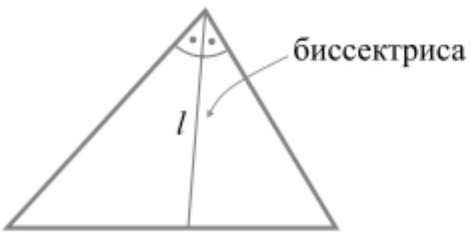
$$6h = 20\sqrt{5}$$

$$h = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

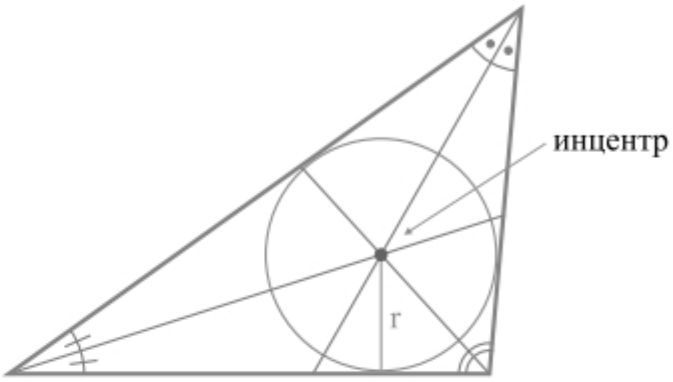
Жауабы: $\frac{10\sqrt{5}}{3}$.

БИССЕКТРИСА

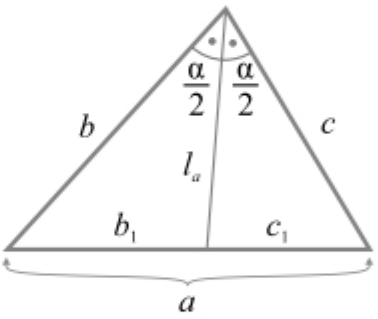
Биссектриса – үшбұрыштың ішкі бұрышын қақ бөліп, төбесін қарсы жатқан қабырғамен қосатын кесінді.



Биссектрисалардың қиылысу нүктесі әрдайым үшбұрыштың ішінде орналасады. Ол нүкте **инцентр** деп аталады. Биссектрисалардың қиылысу нүктесі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі болып табылады.



Биссектрисаның ұзындығы:



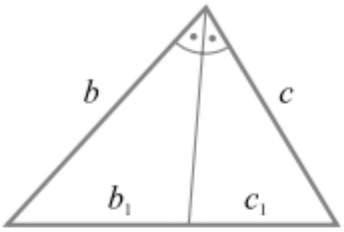
$$l_a = \sqrt{bc - b_1 c_1}$$

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}$$

© «EduCon» басылымдары

Биссектрисаның қасиеті

Биссектриса үшбұрыштың қабырғасын қалған екі қабырғаға тура пропорцинал болатын кесінділерге бөледі:



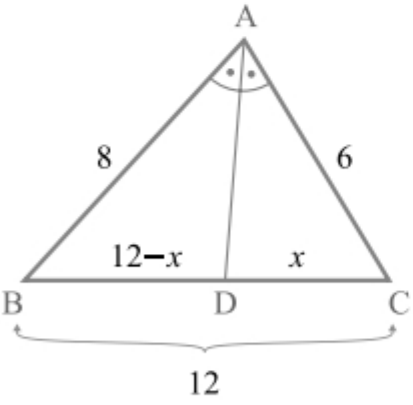
$$\frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}$$

Мысал 2

ABC үшбұрышында: $AB=8,\ AC=6,\ BC=12$.

Үшбұрыштың BC қабырғасы AD биссектрисасымен қандай кесінділерге бөлінетінін табыңыз.

Шешімі:



$$\frac{8}{6}=\frac{12-x}{x}$$

$$8x=72-6x$$

$$14x=72$$

$$x=\frac{36}{7}$$

$$DC=x=\frac{36}{7}$$

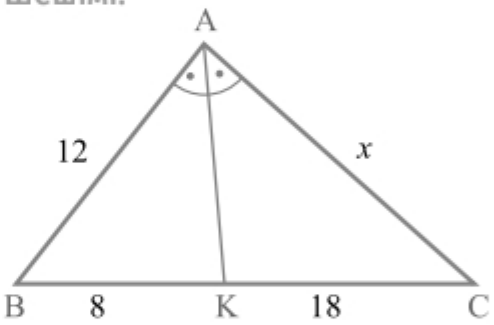
$$BD=12-x=12-\frac{36}{7}=\frac{48}{7}$$

Жауабы: $\frac{48}{7};\frac{36}{7}$.

Мысал 3

A бұрышының биссектрисасы ABC үшбұрышының BC қабырғасын $BK=8$ және $KC=18$ болатын кесінділеріне бөледі. Егер $AB=12$ болса, онда AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:



$$\frac{12}{x}=\frac{8}{18}$$

$$8x=12\cdot 18$$

$$x=27$$

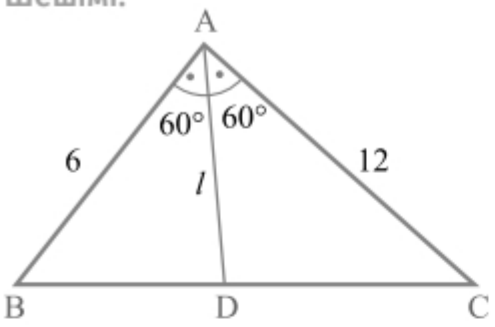
Жауабы: 27.

Мысал 4

ABC үшбұрышында: $AB=6,\ AC=12,$ $\angle A=120^\circ$. A бұрышының биссектрисасын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

Шешімі:



$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

$$l = \frac{2\cdot 6\cdot 12\cos 60^\circ}{6+12}$$

$$l = \frac{72}{18}$$

$$l = 4$$

Жауабы: 4.

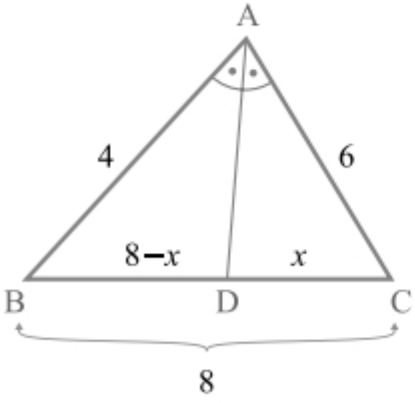
Мысал 5

ABC үшбұрышында: $AB = 4$, $AC = 6$, $BC = 8$.

Үлкен бұрыштың биссектрисасын табыңыз.

Шешімі:

Ең үлкен бұрыш – A бұрышы, өйткені ең үлкен қабырғаға қарсы жатқан бұрыш ең үлкен болады.



$$\frac{4}{6} = \frac{8-x}{x}$$

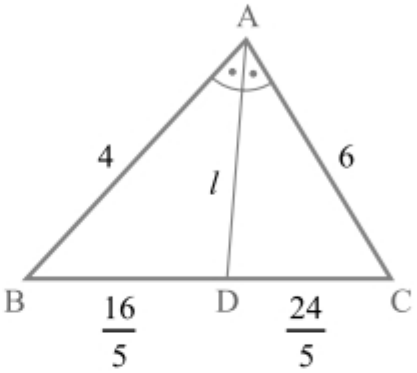
$$4x = 48 - 6x$$

$$10x = 48$$

$$x = \frac{24}{5}$$

$$DC = x = \frac{24}{5}$$

$$BD = 8 - x = 8 - \frac{24}{5} = \frac{16}{5}$$



$$l_a = \sqrt{bc - b_1c_1}$$

$$l = \sqrt{4\cdot 6 - \frac{16}{5}\cdot\frac{24}{5}}$$

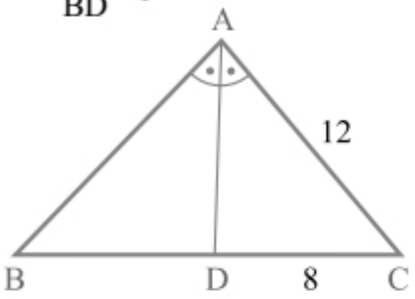
$$l = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

Жауабы: $\frac{6\sqrt{6}}{5}$.

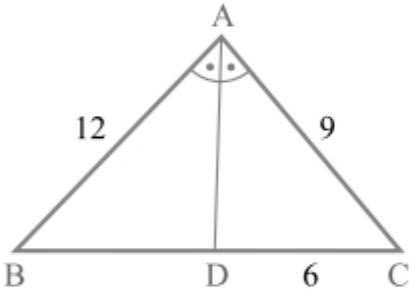
© «EduCon» басылымдары

Есептер

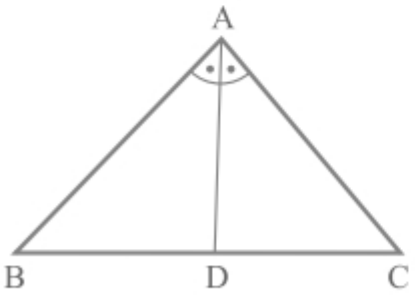
1. $\frac{AB}{BD}$ өрнегінің мәнін табыңыз.



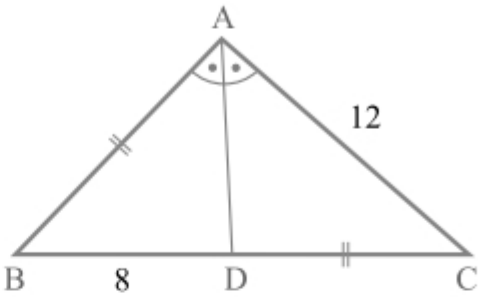
2. ABC үшбұрышының периметрін табыңыз.



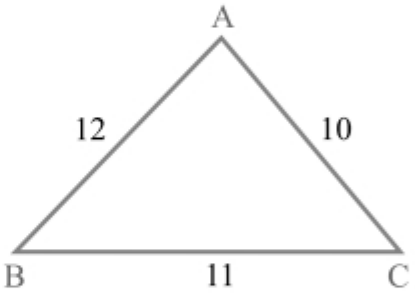
3. Егер $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{2}$ және $BD=DC+3$ болса, онда BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



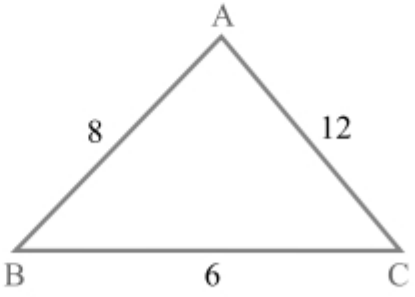
4. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



5. A бұрышының биссектрисасы BC қабырғасын қандай кесінділерге бөлетінін табыңыз.

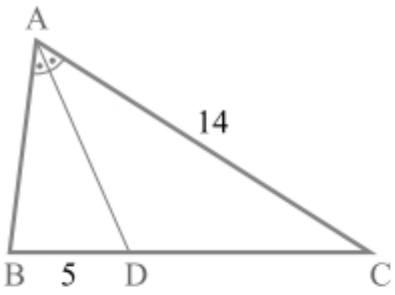


6. B бұрышының биссектрисасының ұзындығын табыңыз.

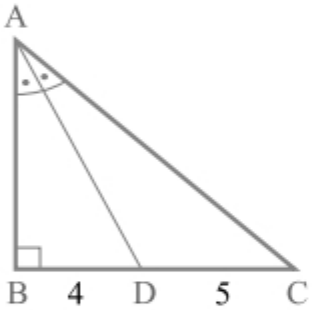


© «EduCon» басылымдары

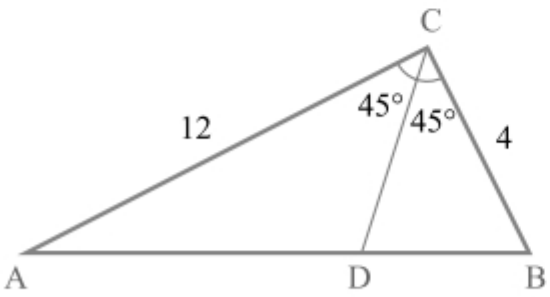
7. Егер $DC = AB + 3$ болса, онда BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



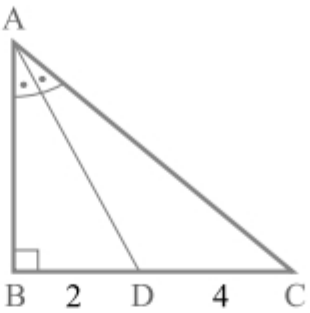
8. AD биссектрисасының ұзындығын табыңыз.



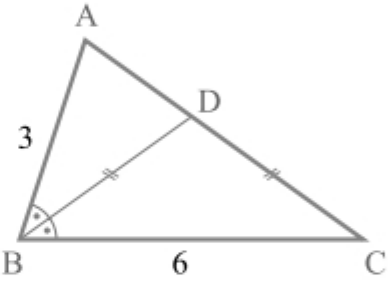
9. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



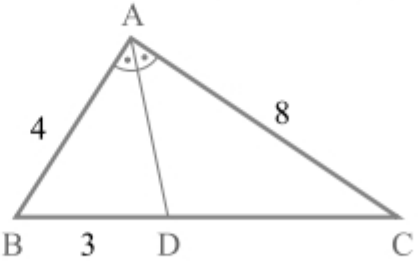
10. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



11. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

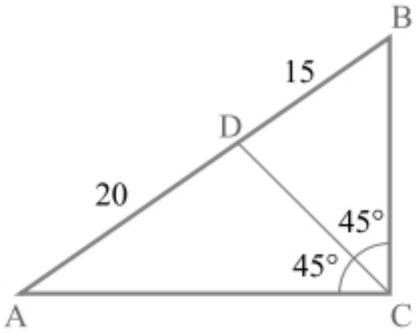


12. AD биссектрисасының ұзындығын табыңыз.



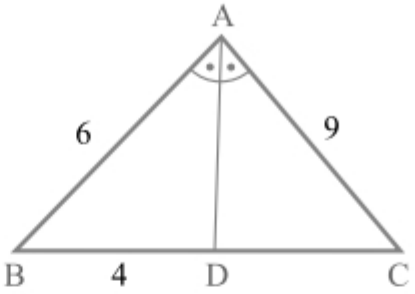
© «EduCon» басылымдары

13. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



14. Қабырғалары 4 см, 8 см және 9 см болатын үшбұрыш берілген. Үлкен қабырғаға жүргізілген биссектрисаның ұзындығын табыңыз.

15. AD биссектрисасының ұзындығын табыңыз.

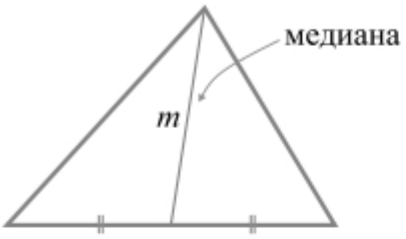


16. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 6 см және 8 см. Тік бұрыштың биссектрисасы гипотенузаны қандай кесінділерге бөлетінін табыңыз.

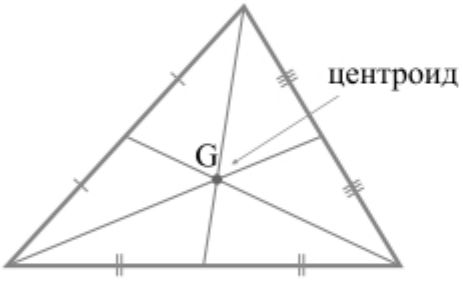
© «EduCon» басылымдары

МЕДИАНА

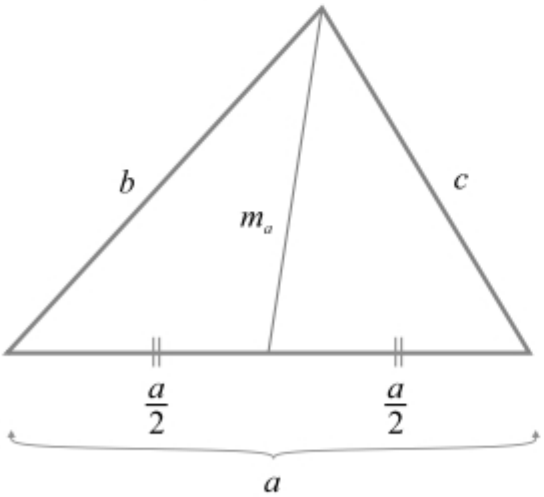
Медиана – үшбұрыштың төбесін оған қарсы жатқан қабырғаның ортасымен қосатын кесінді.



Медианалардың қиылысу нүктесі әрдайым үшбұрыштың ішінде орналасады. Ол нүкте **центроид** деп аталады. Медианалардың қиылысу нүктесі үшбұрыштың ауырлық центрі болып табылады.



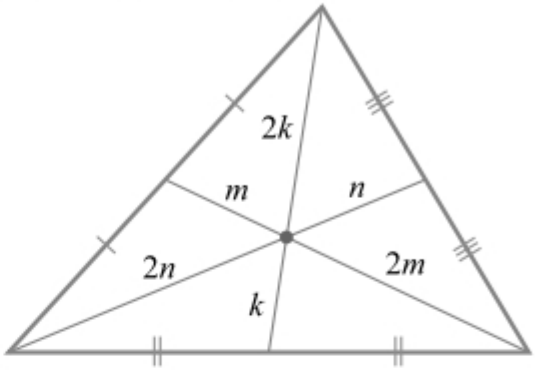
Медиананың ұзындығы:



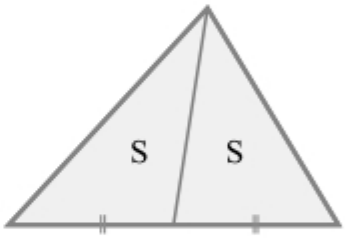
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$$

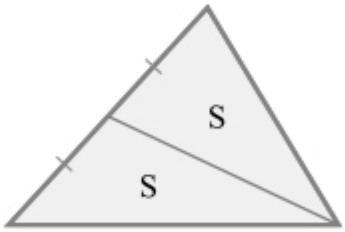
Медианалардың қасиеттері

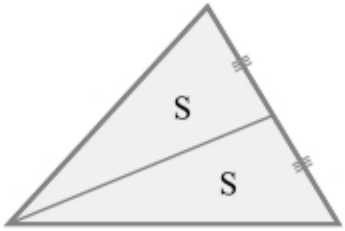
1. Медианалардың қиылысу нүктесі әр медианаңы төбеден есептегенде 2:1 қатынасындай етіп бөлінеді:



2. Әр медиана үшбұрышты 2 теңшамалы үшбұрыштарға бөледі (аудандары бірдей):

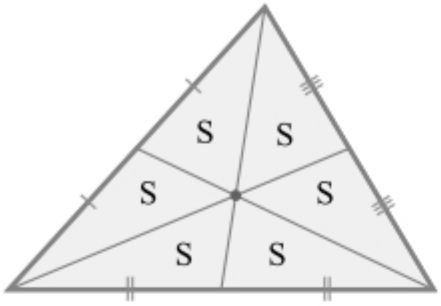






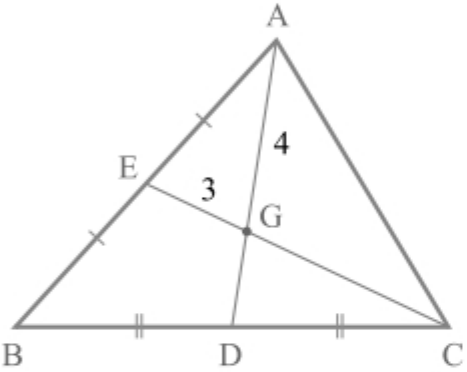
© «EduCon» басылымдары

3. Үш медиана үшбұрышты 6 теңшамалы үшбұрыштарға бөледі:

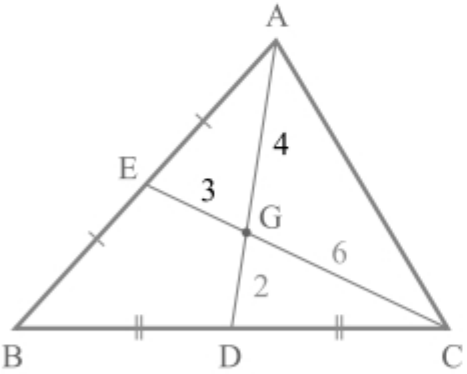


Мысал 6

$AD + CE$ өрнегінің мәнін табыңыз.



Шешімі:



$$DG = \frac{GA}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$CG = 2 \cdot GE = 2 \cdot 3 = 6$$

$$AD = 4 + 2 = 6$$

$$CE = 6 + 3 = 9$$

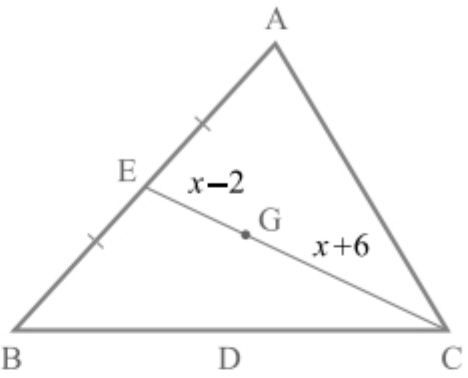
$$AD + CE = 6 + 9 = 15$$

Жауабы: 15.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 7

CE медианасының ұзындығын табыңыз.



Шешімі:

$$CG = 2 \cdot GE$$

$$x + 6 = 2(x - 2)$$

$$x + 6 = 2x - 4$$

$$x = 10$$

$$CE = 2x + 4 = 2 \cdot 10 + 4 = 24$$

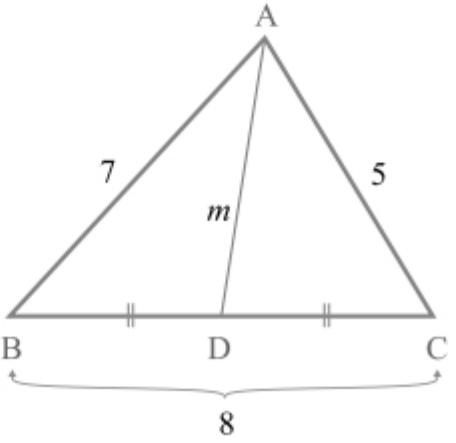
Жауабы: 24.

Мысал 8

ABC үшбұрышында: $AB = 7$, $AC = 5$, $BC = 8$.

BC қабырғасына жүргізілген медианаңың ұзындығын табыңыз.

Шешімі:



EduCon басылымдары

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$$

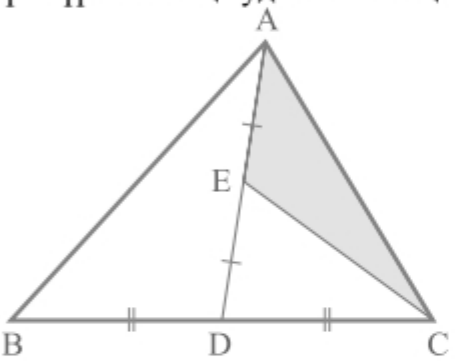
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(7^2 + 5^2\right) - 8^2}$$

$$m_a = \sqrt{21}$$

Жауабы: $\sqrt{21}$.

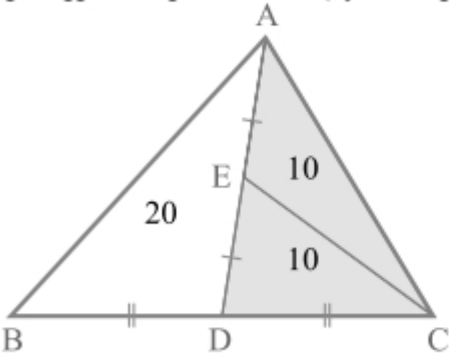
Мысал 9

Егер $S_{AEC} = 10$ см² болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



Шешімі:

Медиана үшбұрышты 2 теңшамалы үшбұрыштарға бөледі (аудандары бірдей):



$S_{AEC} = S_{EDC} = 10$ см²

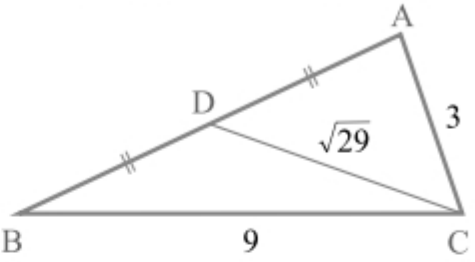
$S_{ADC} = S_{ABD} = 20$ см²

$S_{ABC} = 20 + 10 + 10 = 40$ см²

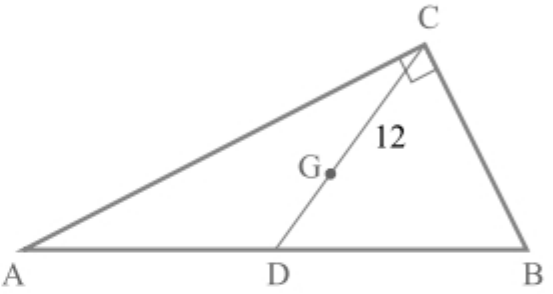
Жауабы: 40 см².

Есептер

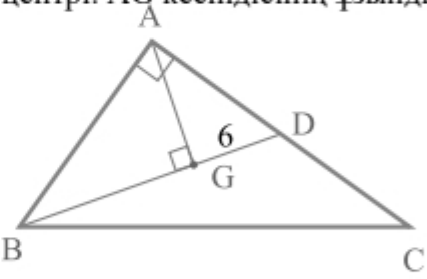
1. ABC үшбұрышының периметрін табыңыз.



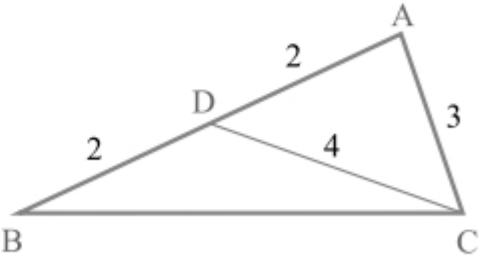
2. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



3. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. AG кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

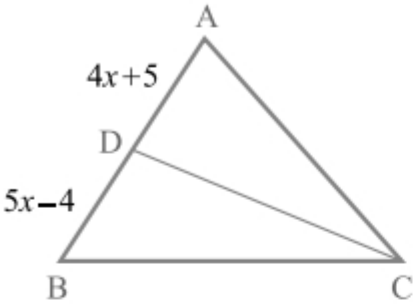


4. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

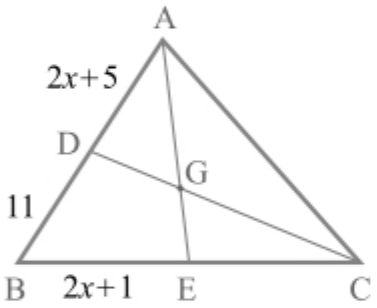


© «EduCon» басылымдары

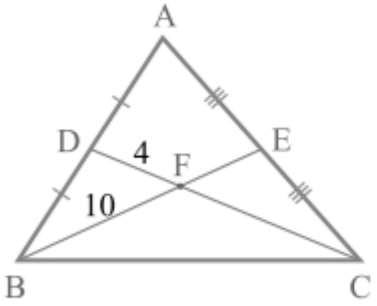
5. CD – медиана. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



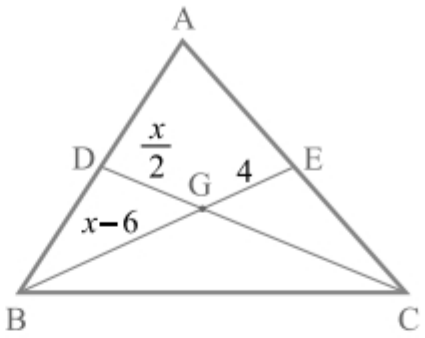
6. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



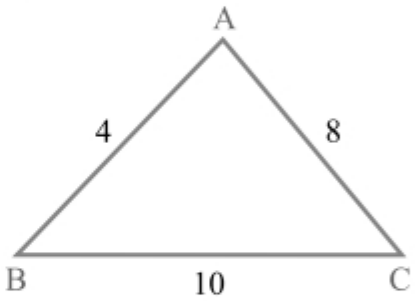
7. CD + BE өрнегінің мәнін табыңыз.



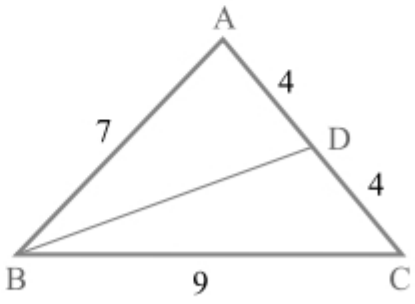
8. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. CD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



9. A төбесінен жүргізілген медианаңың ұзындығын табыңыз.

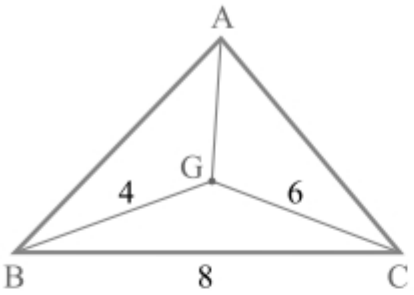


10. BD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

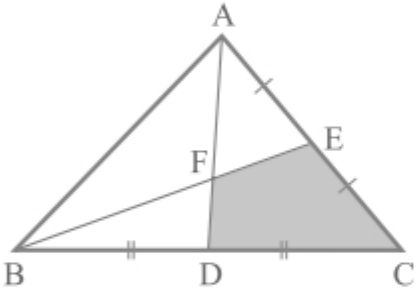


© «EduCon» басылымдары

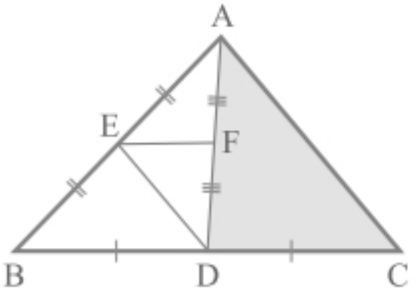
11. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. AG кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



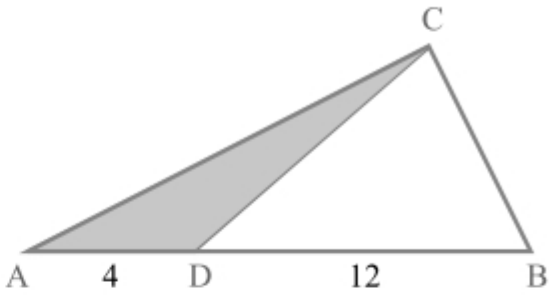
12. Егер $S_{ABC} = 78$ см^2 болса, онда DFEC төртбұрышының ауданын табыңыз.



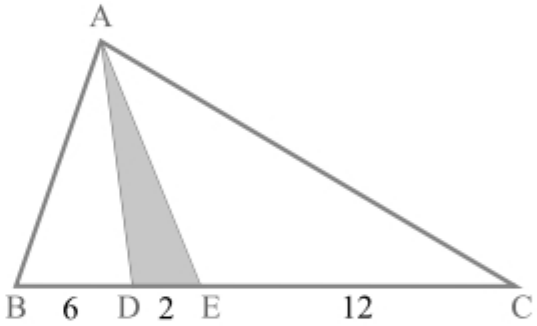
13. Егер $S_{DEF} = 8$ см^2 болса, онда DAC үшбұрышының ауданын табыңыз.



14. Егер $S_{ABC} = 84$ см^2 болса, онда DAC үшбұрышының ауданын табыңыз.



15. Егер $S_{DAE} = 4$ см^2 болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.

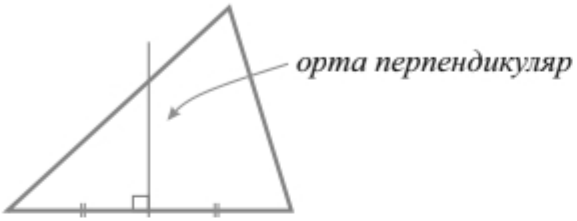


16. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны $\sqrt{32}$ см, ал бүйір қабырғасына жүргізілген медиана 5 см. Бүйір қабырғасының ұзындығын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

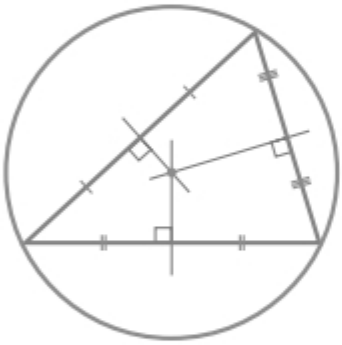
ОРТА ПЕРПЕНДИКУЛЯР

Орта перпендикуляр – үшбұрыштың қабырғасын қақ бөлетін перпендикуляр түзу.

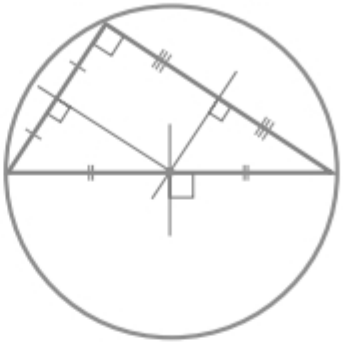


Үш орта перпендикуляр бір нүктеде қиылысады. Ол нүкте үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болып табылады.

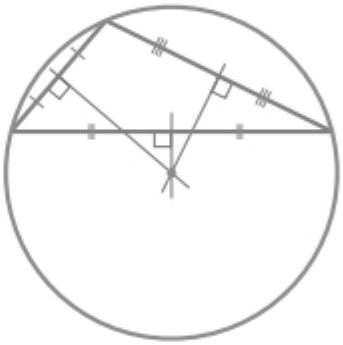
1. Сүйір бұрышты үшбұрыш:



2. Тікбұрышты үшбұрыш:



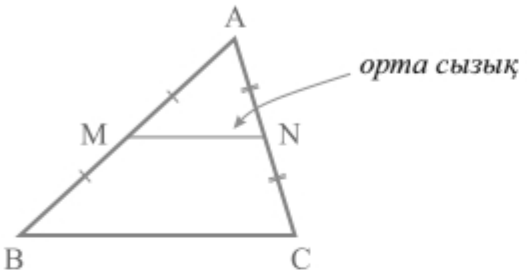
3. Доғал бұрышты үшбұрыш:



© «EduCon» басылымдары

ОРТА СЫЗЫҚ

Орта сызық – үшбұрыштың екі қабырғасының ортасын қосатын кесінді.

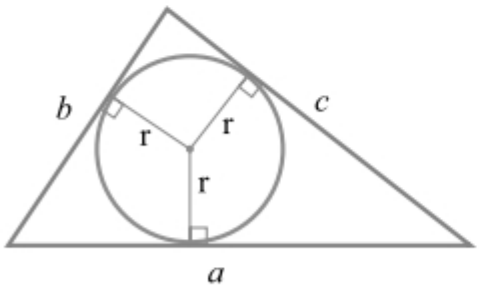


$MN \parallel BC$

$$MN = \frac{BC}{2}$$

ҮШБҰРЫШҚА ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН ШЕҢБЕРЛЕР

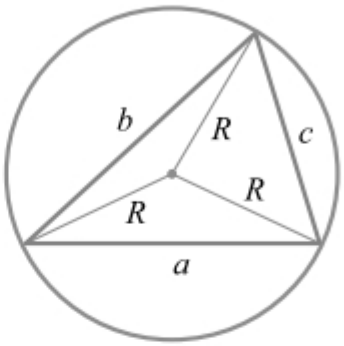
Кез келген үшбұрышқа іштей шеңбер сызуға болады. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі – биссектрисалардың қиылысу нүктесі болып табылады.



$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

S – үшбұрыштың ауданы.

Кез келген үшбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі – орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі болып табылады.



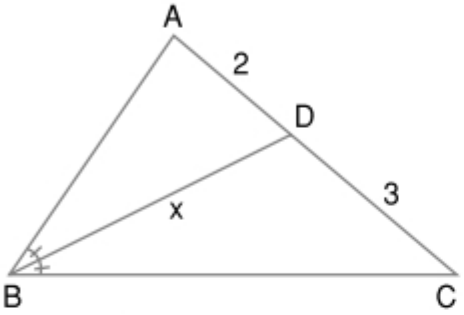
$$R = \frac{abc}{4S}$$

S – үшбұрыштың ауданы.

© «EduCon» басылымдары

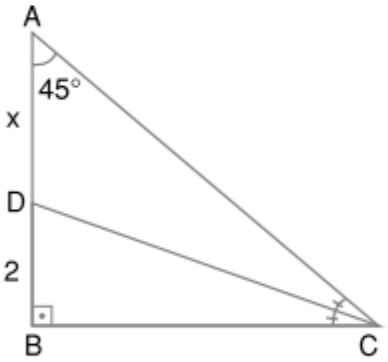
ТЕСТ №3

1. ABC үшбұрышының периметрі 15 см. x -тің мәнін табыңыз.



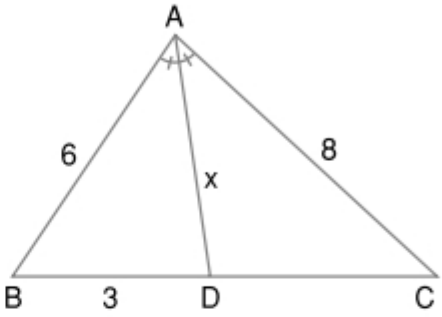
A) $3\sqrt{3}$ см
B) 6 см
C) $3\sqrt{2}$ см
D) $4\sqrt{5}$ см
E) 7 см

2. x -тің мәнін табыңыз.



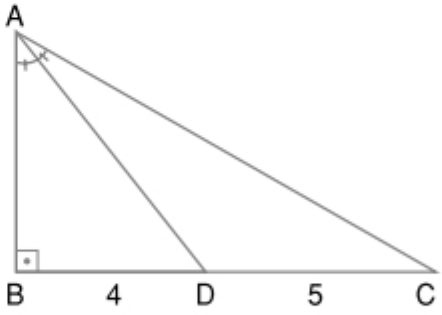
A) $4\sqrt{2}$ см
B) $3\sqrt{5}$ см
C) $4\sqrt{3}$ см
D) $\sqrt{2}$ см
E) $2\sqrt{2}$ см

3. x -тің мәнін табыңыз.



A) 5 см
B) 6 см
C) 7 см
D) 8 см
E) 4 см

4. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



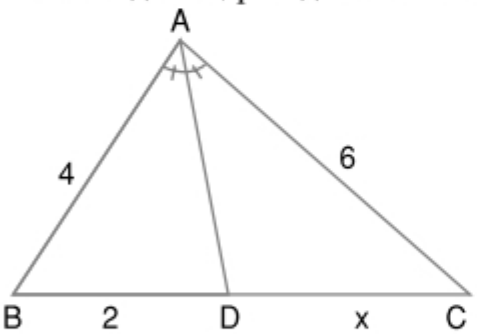
A) $2\sqrt{10}$ см
B) $4\sqrt{10}$ см
C) $3\sqrt{10}$ см
D) $\sqrt{10}$ см
E) $5\sqrt{10}$ см

© «EduCon» басылымдары

5. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 3 см және 4 см. Тік бұрыштың биссектрисасы гипотенузаны қандай кесінділерге бөлетінін табыңыз.

A) $\frac{5}{3}$ см
B) $\frac{11}{4}$ см
C) $\frac{20}{7}$ см
D) 2 см
E) $\frac{9}{4}$ см
F) $\frac{10}{3}$ см
G) 3 см
H) $\frac{15}{7}$ см

6. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

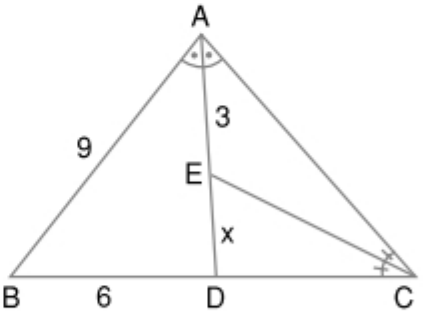


A) $3\sqrt{2}$ см
B) $2\sqrt{3}$ см
C) $3\sqrt{5}$ см
D) $5\sqrt{2}$ см
E) $4\sqrt{3}$ см

7. Қабырғалары 10 см, 6 см және 8 см болатын үшбұрыш берілген. Қабырғаларына жүргізілген биссектрисалардың ұзындықтарын табыңыз.

A) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ см
B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ см
C) $3\sqrt{5}$ см
D) $\frac{7\sqrt{10}}{3}$ см
E) $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ см
F) $5\sqrt{3}$ см
G) $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ см
H) $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ см

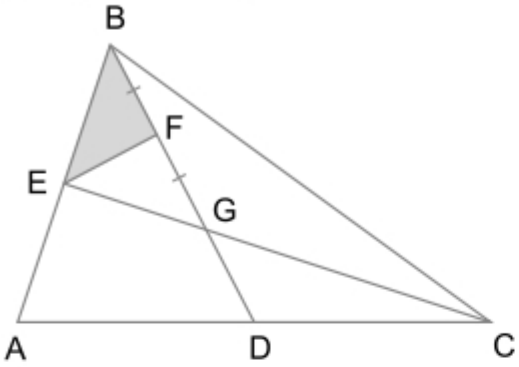
8. x -тің мәнін табыңыз.



A) 3 см
B) 4 см
C) 2 см
D) 1 см
E) 5 см

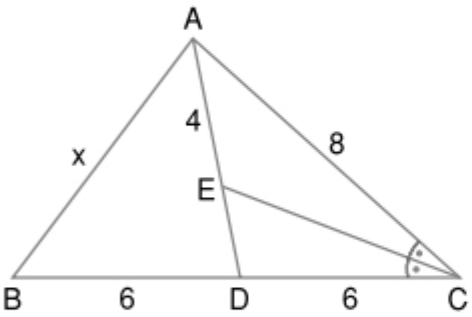
© «EduCon» басылымдары

9. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. Егер $S_{BEF} = 3$ см^2 болса, онда BGC үшбұрышының ауданын табыңыз.



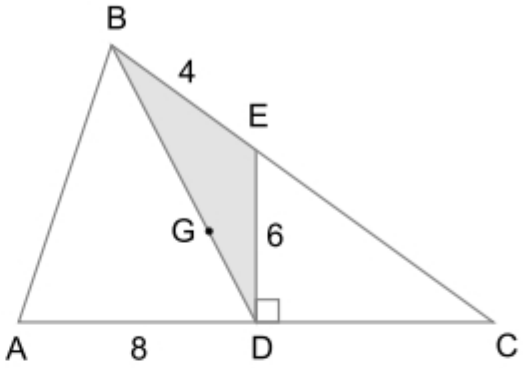
A) 12 см^2
B) 6 см^2
C) 16 см^2
D) 8 см^2
E) 14 см^2

10. x -тің мәнін табыңыз.



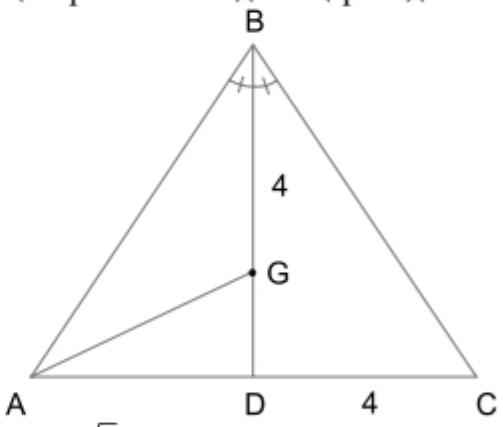
A) $6\sqrt{3}$ см
B) $4\sqrt{21}$ см
C) $\sqrt{106}$ см
D) $\sqrt{119}$ см
E) $4\sqrt{71}$ см

11. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. BDE үшбұрышының ауданын табыңыз.



A) 9,6 см^2
B) 8,6 см^2
C) 4,8 см^2
D) 8 см^2
E) 10,2 см^2

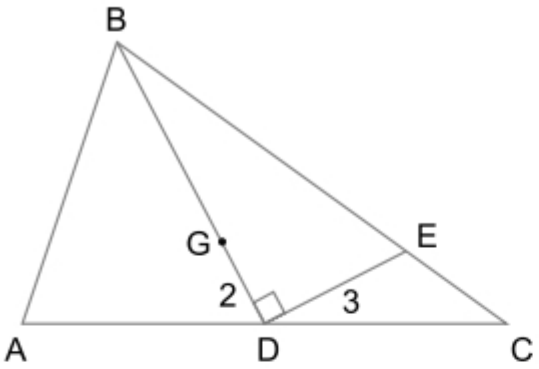
12. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. AG кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



A) $2\sqrt{5}$ см
B) $3\sqrt{2}$ см
C) $4\sqrt{3}$ см
D) $3\sqrt{5}$ см
E) $5\sqrt{7}$ см

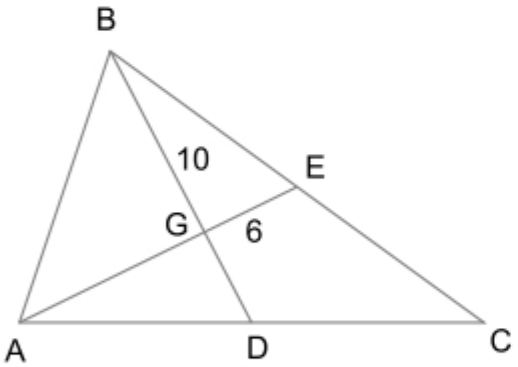
© «EduCon» басылымдары

13. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. BE кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



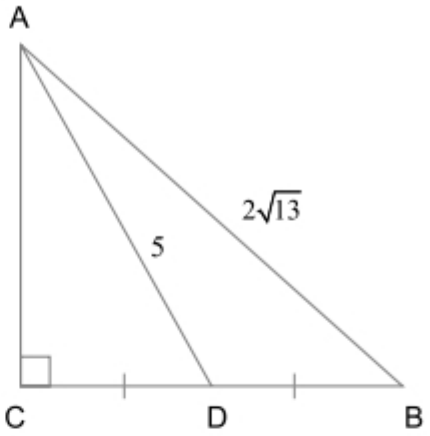
A) $4\sqrt{3}$ см
B) $3\sqrt{5}$ см
C) 6 см
D) $3\sqrt{2}$ см
E) 8 см

14. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. $AE + BD$ өрнегінің мәнін табыңыз.



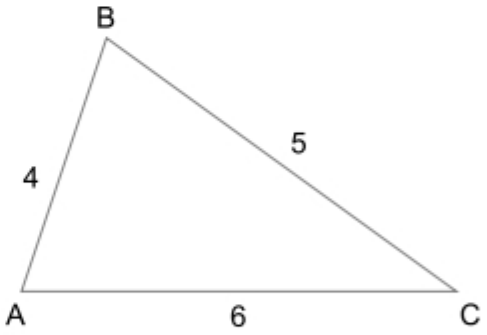
A) 15 см
B) 33 см
C) 18 см
D) 36 см
E) 27 см

15. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) 4 см
B) 3 см
C) $2\sqrt{2}$ см
D) 1 см
E) $2\sqrt{3}$ см

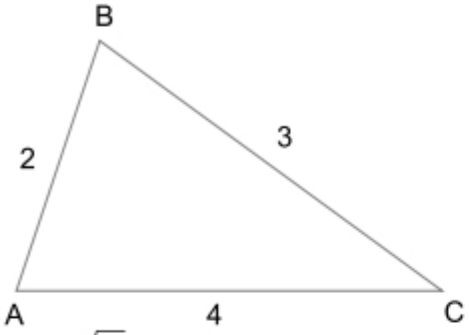
16. AC қабырғасына түсірілген медианаңың ұзындығын табыңыз.



A) $\frac{\sqrt{41}}{3}$ см
B) $\frac{\sqrt{46}}{2}$ см
C) 7 см
D) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см
E) 6 см

© «EduCon» басылымдары

17. Үшбұрыштың AC қабырғасына түсірілген биіктігін табыңыз.



A) $\frac{3\sqrt{15}}{7}$ см

B) $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ см

C) $\frac{4\sqrt{15}}{3}$ см

D) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ см

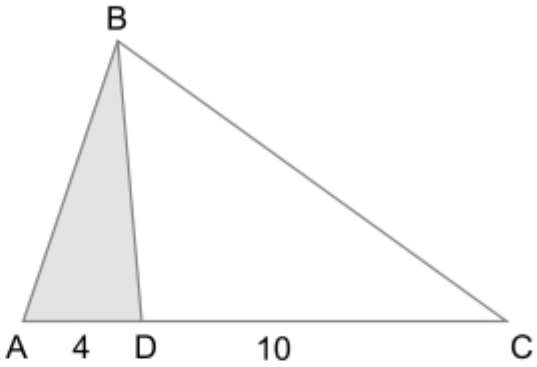
E) $\frac{5\sqrt{15}}{2}$ см

F) $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ см

G) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ см

H) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см

18. Егер $S_{DBC} = 20$ см^2 болса, онда ABD үшбұрышының ауданын табыңыз.



A) 10 см^2

B) 8 см^2

C) 6 см^2

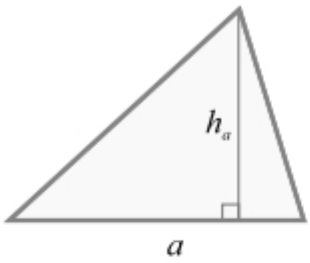
D) 4 см^2

E) 12 см^2

© «EduCon» басылымдары

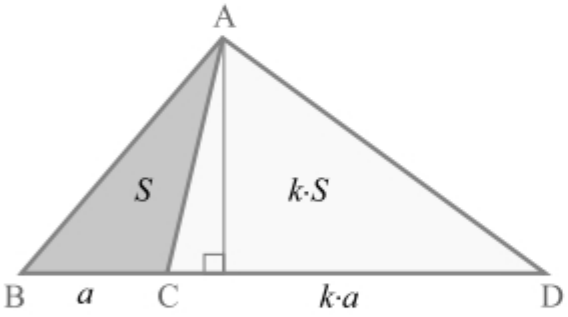
ҮШБҰРЫШТЫҢ АУДАНЫ

1. Қабырға мен оған түсірілген биіктік арқылы:



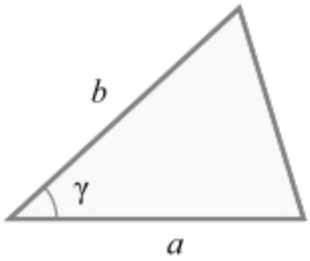
$$S=\frac{1}{2}ah_a$$

Егер екі үшбұрыштың биіктіктері бірдей болса, онда олардың аудандарының қатынасы биіктік түсірілген қабырғаларының қатынасына тең болады:



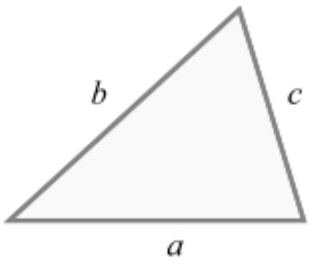
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{BC}{CD}$$

2. Екі қабырға мен олардың арасындағы бұрыш арқылы:



$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

3. Үш қабырға арқылы:



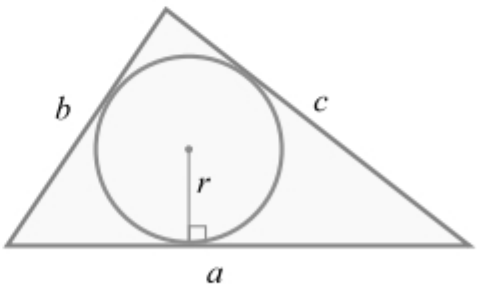
Герон формуласы:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p – жартылай периметр

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

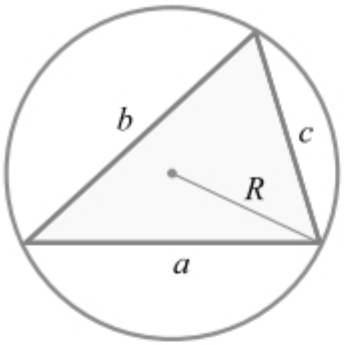
4. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер арқылы:



$$S=\frac{r(a+b+c)}{2}$$

© «EduCon» басылымдары

5. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер арқылы:

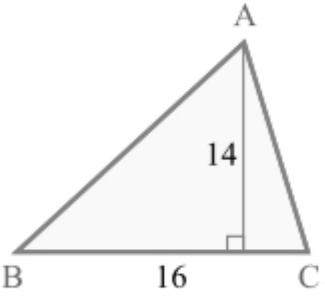


$$S=\frac{abc}{4R}$$

Мысал 1

Егер ABC үшбұрышының бір қабырғасы 16 см, ал оған түсірілген биіктік 14 см болса, онда оның ауданын табыңыз.

Шешімі:



$$S=\frac{1}{2}ah_a$$

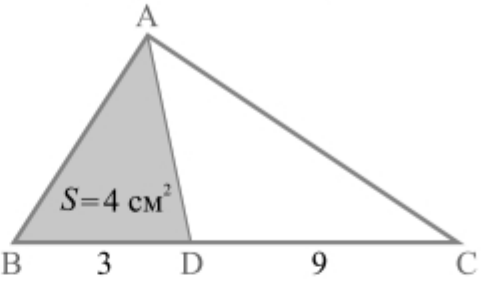
$$S=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 14$$

$$S=112 \text{ см}^2$$

Жауабы: 112 см².

Мысал 2

ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



Шешімі:

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{4}{S_{ADC}}=\frac{3}{9}$$

$$S_{ADC}=12 \text{ см}^2$$

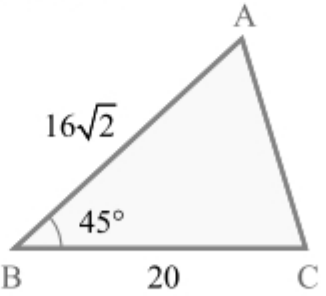
$$S_{ABC}=4+12=16 \text{ см}^2$$

Жауабы: 16 см².

Мысал 3

Егер $BC=20$ см, $AB=16\sqrt{2}$ см, $\angle B=45^\circ$ болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.

Шешімі:



$$S=\frac{1}{2}ab\sin\square$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 16\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ$$

$$S=160 \text{ см}^2$$

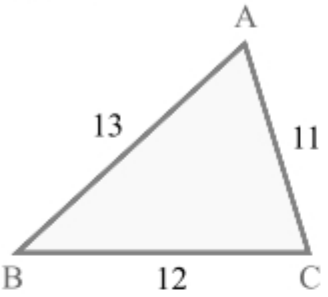
Жауабы: 160 см².

© «EduCon» басылымдары

Мысал 4

Қабырғалары 11 см, 12 см және 13 см болатын үшбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p=\frac{11+12+13}{2}=18$$

$$S=\sqrt{18\cdot 7\cdot 6\cdot 5}$$

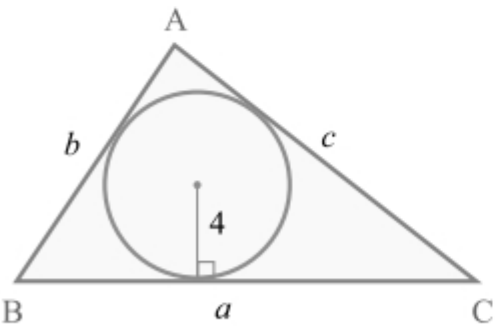
$$S=6\sqrt{105}$$

Жауабы: $S=6\sqrt{105}$ см².

Мысал 5

Үшбұрыштың периметрі 28 см, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 4 см. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:



$$P=a+b+c=28\text{ см}$$

$$r=4\text{ см}$$

$$S=\frac{r(a+b+c)}{2}$$

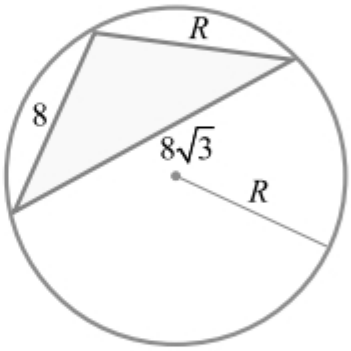
$$S=\frac{4\cdot 28}{2}=56\ \text{см}^2$$

Жауабы: 56 см².

Мысал 6

Үшбұрыштың екі қабырғасы 8 см және $8\sqrt{3}$ см, ал үшінші қабырғасы оған сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:



$$S=\frac{abc}{4R}$$

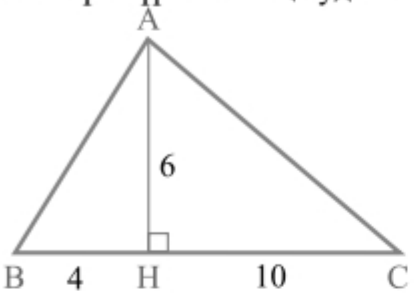
$$S=\frac{8\cdot 8\sqrt{3}\cdot R}{4R}=16\sqrt{3}\ \text{см}^2$$

Жауабы: $16\sqrt{3}$ см².

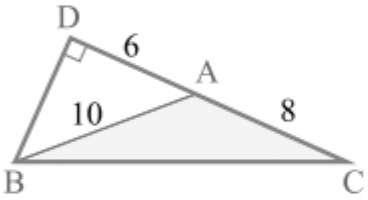
© «EduCon» басылымдары

Есептер

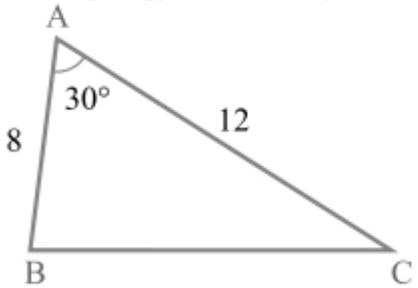
1. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



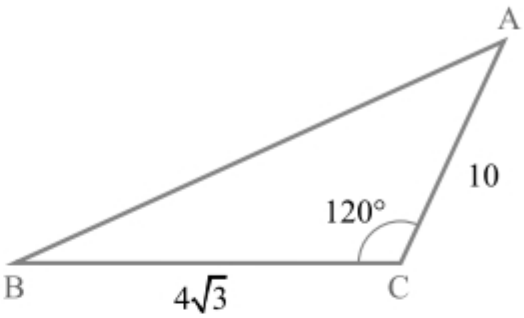
2. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



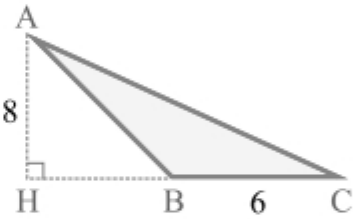
3. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



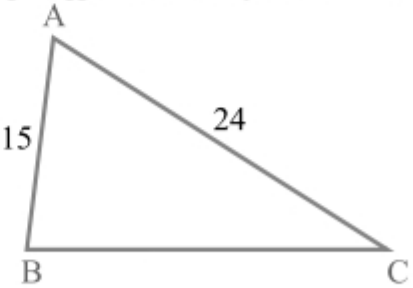
4. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



5. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.

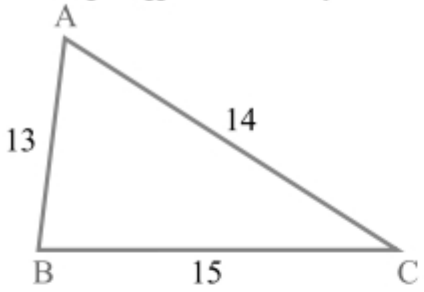


6. Егер $\cos\angle A = \frac{3}{5}$ болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз

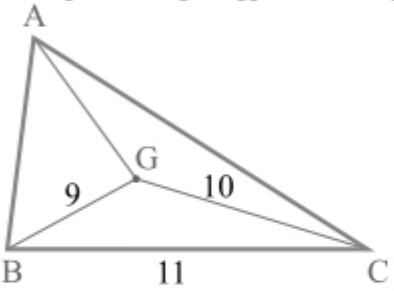


© «EduCon» басылымдары

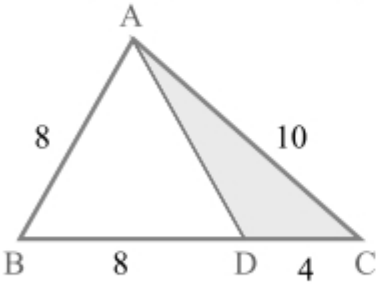
7. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



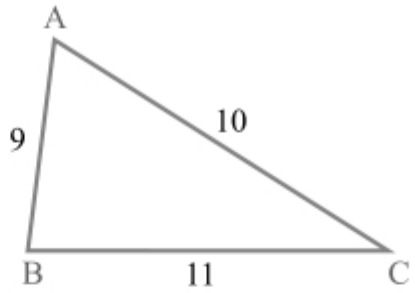
8. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. Осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.



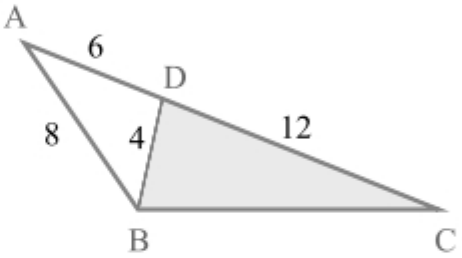
9. ADC үшбұрышының ауданын табыңыз.



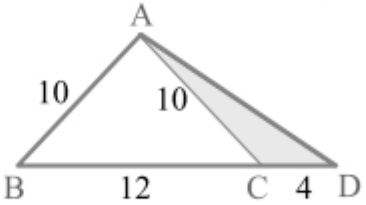
10. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



11. BDC үшбұрышының ауданын табыңыз.

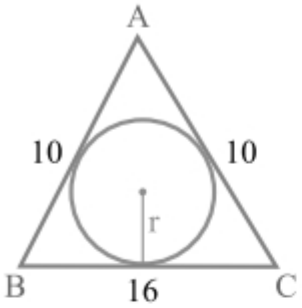


12. ACD үшбұрышының ауданын табыңыз.

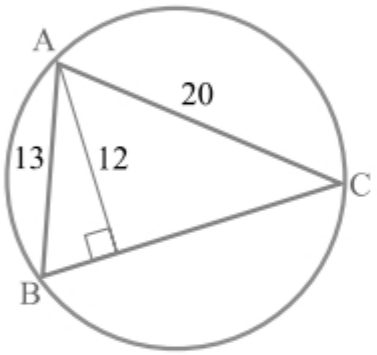


© «EduCon» басылымдары

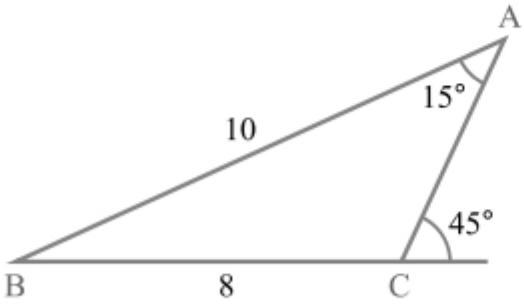
13. ABC үшбұрышына іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңыз.



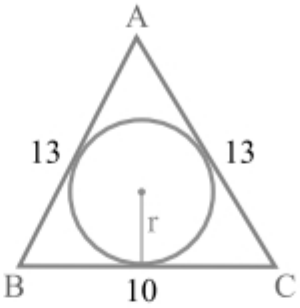
14. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



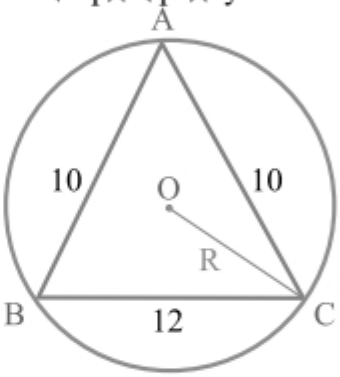
15. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



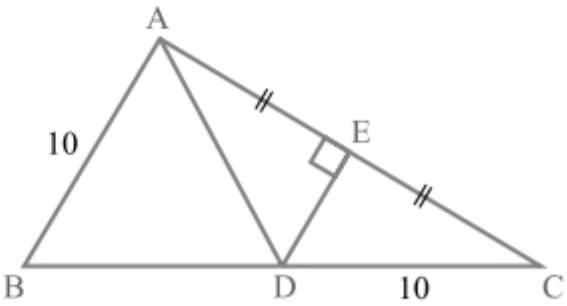
16. ABC үшбұрышына іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңыз.



17. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

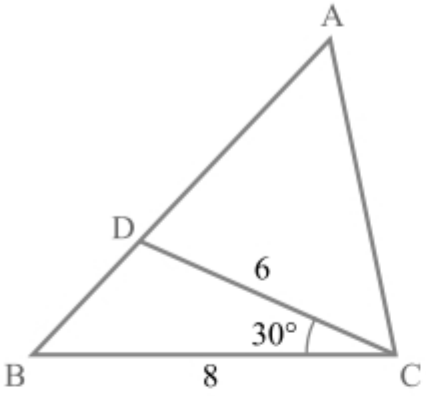


18. Егер ADC үшбұрышының ауданы 40 см^2 болса, онда BD қабырғасының ұзындығын табыңыз.

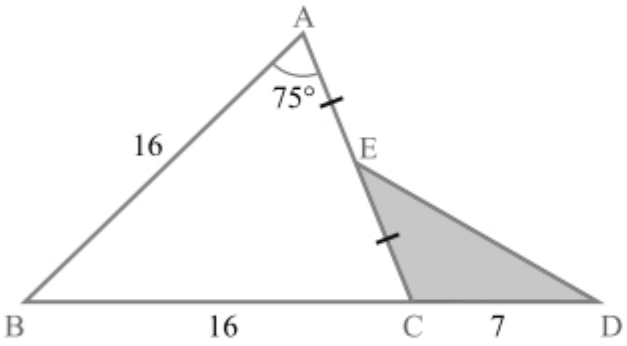


© «EduCon» басылымдары

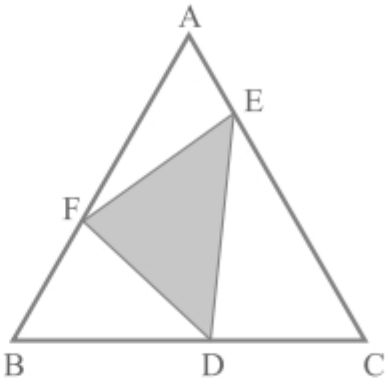
19. Егер $AD = 2BD$ болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



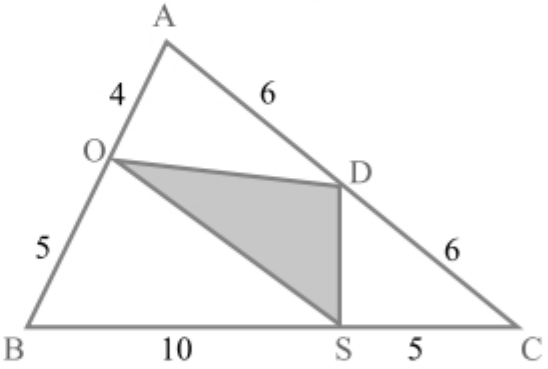
20. DCE үшбұрышының ауданын табыңыз.



21. Егер $S_{ABC} = 200$ см^2, $2AF = 3FB$, $2BD = 3DC$, $CE = 3EA$ болса, онда DFE үшбұрышының ауданын табыңыз.



22. DOS үшбұрышының ауданын табыңыз.

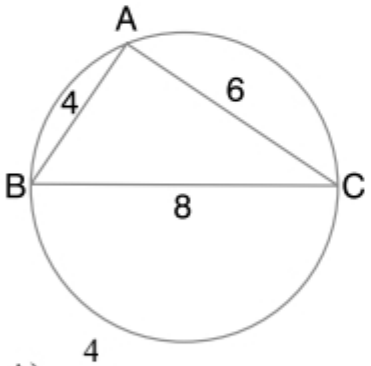


© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №4

1. Үшбұрыштың периметрі 12 см, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 1 см. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.
   A) 4 см^2
   B) 8 см^2
   C) 10 см^2
   D) 6 см^2
   E) 12 см^2

2. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

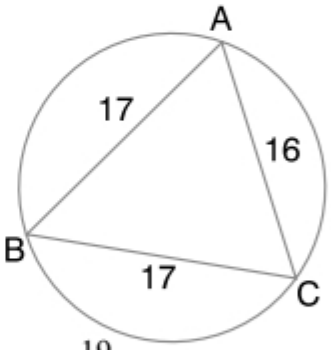


   A) $\frac{4}{\sqrt{15}}$ см
   B) $\frac{16}{\sqrt{15}}$ см
   C) $\frac{5}{\sqrt{15}}$ см
   D) $\frac{8}{\sqrt{13}}$ см
   E) $\frac{6}{\sqrt{17}}$ см

3. Қабырғалары 10 см, 10 см және 12 см болатын үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

   A) 2 см
   B) 1 см
   C) 6 см
   D) 4 см
   E) 3 см

4. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



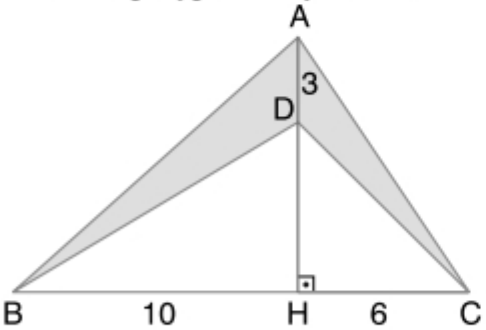
   A) $8\frac{19}{30}$ см
   B) $10\frac{11}{30}$ см
   C) $9\frac{19}{30}$ см
   D) $7\frac{29}{30}$ см
   E) $6\frac{17}{30}$ см

© «EduCon» басылымдары

5. Теңбүйірлі үшбұрыштың екі қабырғасы сәйкесінше 4 см және 6 см. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.
   A) $3\sqrt{7}$ см²
   B) 8 см²
   C) 6 см²
   D) $2\sqrt{5}$ см²
   E) $4\sqrt{3}$ см²
   F) 4 см²
   G) $8\sqrt{2}$ см²
   H) 12 см²

6. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 30°, ал бүйір қабырғасы 10 см. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.
   A) 35 см²
   B) 20 см²
   C) $25\sqrt{3}$ см²
   D) 25 см²
   E) $20\sqrt{2}$ см²
   F) $30\sqrt{3}$ см²
   G) 16 см²
   H) $26\sqrt{5}$ см²

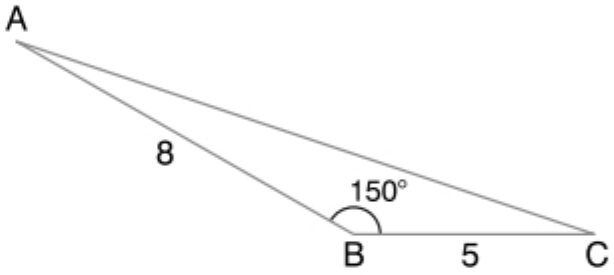
7. Боялған фигураның ауданын табыңыз.



   A) 20 см²
   B) 24 см²
   C) 28 см²
   D) 32 см²
   E) 36 см²

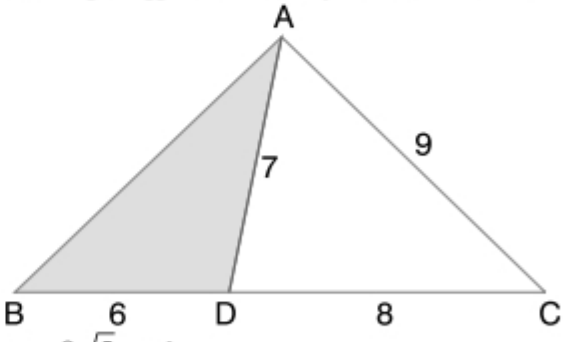
8. Үшбұрышта ұзындықтары 9 см және 18 см болатын қабырғаларына биіктік түсірілген. Егер бірінші биіктіктің ұзындығы 4 см болса, онда екінші биіктіктің ұзындығын анықтаңыз.
   A) 4 см
   B) 12 см
   C) 16 см
   D) 6 см
   E) 8 см
   F) 14 см
   G) 2 см
   H) 10 см

9. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



   A) 10 см²
   B) 8 см²
   C) 12 см²
   D) 14 см²
   E) 16 см²

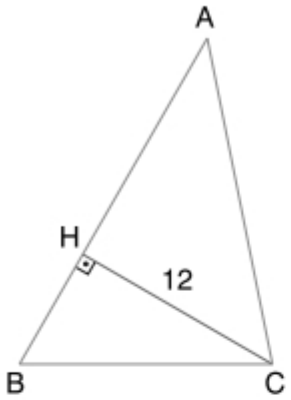
10. ABD үшбұрышының ауданын табыңыз.



   A) $8\sqrt{5}$ см²
   B) $12\sqrt{5}$ см²
   C) $14\sqrt{3}$ см²
   D) $16\sqrt{2}$ см²
   E) $9\sqrt{5}$ см²

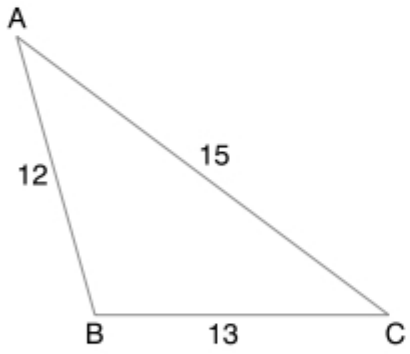
© «EduCon» басылымдары

11. Егер $AB=16$ см болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



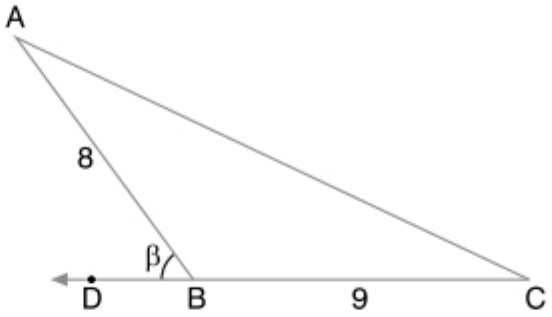
A) 48 см^2
B) 108 см^2
C) 72 см^2
D) 36 см^2
E) 96 см^2

12. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



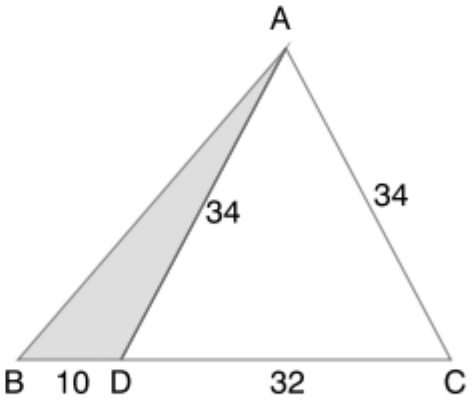
A) $24\sqrt{14}$ см^2
B) $24\sqrt{10}$ см^2
C) $20\sqrt{14}$ см^2
D) $20\sqrt{10}$ см^2
E) $28\sqrt{14}$ см^2

13. Егер $\sin\beta=\frac{1}{3}$ болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



A) 14 см^2
B) 12 см^2
C) 16 см^2
D) 8 см^2
E) 10 см^2

14. ABD үшбұрышының ауданын табыңыз.



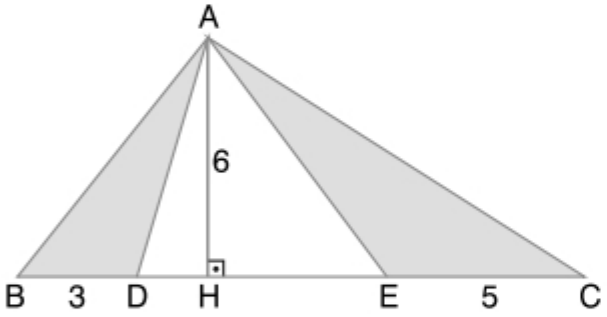
A) 120 см^2
B) 140 см^2
C) 150 см^2
D) 160 см^2
E) 180 см^2

© «EduCon» басылымдары

15. ABC үшбұрышында: AB=12 см, AC=15 см және $\angle A = 120°$. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.

A) $35\sqrt{3}$ см²
B) $25\sqrt{3}$ см²
C) $45\sqrt{3}$ см²
D) $60\sqrt{3}$ см²
E) $40\sqrt{3}$ см²

16. Боялған фигураның ауданын табыңыз.

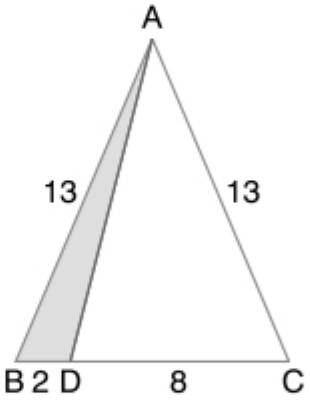


A) 16 см²
B) 20 см²
C) 24 см²
D) 18 см²
E) 14 см²

17. Екі қабырғасы 8 см және 12 см, ал олардың арасындағы бұрыш 30° болатын үшбұрыштың ауданын табыңыз.

A) 34 см²
B) 24 см²
C) 14 см²
D) 18 см²
E) 20 см²

18. ABD үшбұрышының ауданын табыңыз.



A) 16 см²
B) 8 см²
C) 4 см²
D) 12 см²
E) 10 см²

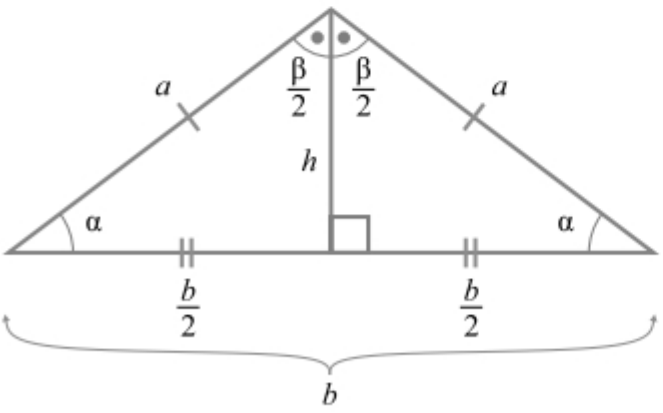
© «EduCon» басылымдары

ТЕҢБҮЙІРЛІ ҮШБҰРЫШ

Теңбүйірлі үшбұрыш – екі қабырғасы тең болатын үшбұрыш.

Тең қабырғалар үшбұрыштың бүйір қабырғалары, ал үшінші қабырға үшбұрыштың табаны деп аталады.

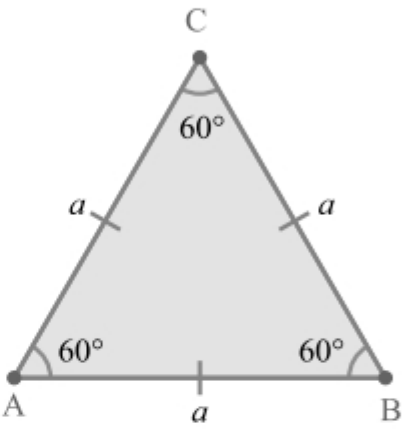
Табанына түсірілген медиана, биссектриса және биіктік беттеседі.



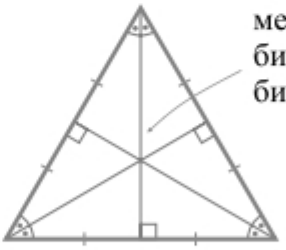
ТЕҢҚАБЫРҒАЛЫ ҮШБҰРЫШ

Теңқабырғалы үшбұрыш – барлық қабырғалары өзара тең болатын үшбұрыш.

Теңқабырғалы үшбұрыш дұрыс үшбұрыш деп те аталады.



Бір төбеден түсірілген медиана, биссектриса және биіктік беттеседі.



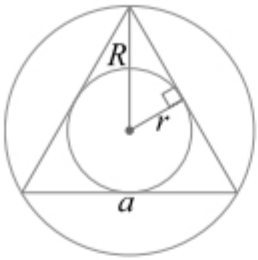
$$P = 3a$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

© «EduCon» басылымдары

Үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлері беттеседі.



$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

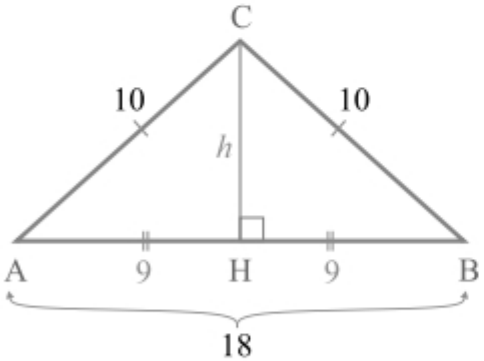
$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$R = 2r$$

Мысал 1

Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 10 см, ал табаны 18 см. Табанына түсірілген биіктікті табыңыз.

Шешімі:



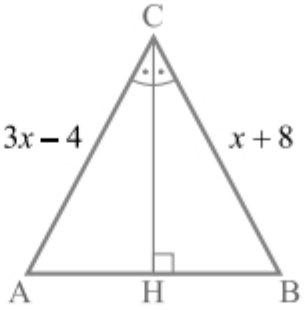
Пифагор теоремасы бойынша:

$h^2 + 9^2 = 10^2$
$h^2 = 100 - 81$
$h^2 = 19$
$h = \sqrt{19}$

Жауабы: $\sqrt{19}$.

Мысал 2

AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



Шешімі:

ΔCAB – табаны AB болатын теңбүйірлі үшбұрыш, өйткені CH кесіндісі әрі биіктік, әрі биссектриса.

$CA = CB$
$3x - 4 = x + 8$
$2x = 12$
$x = 6$
$AC = 3x - 4 = 3 \cdot 6 - 4 = 14$

Жауабы: 14.

Мысал 3

Дұрыс үшбұрыштың ауданы $27\sqrt{3}$ см². Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

Шешімі:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$$

$a^2\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$
$a^2 = 108$
$a = 6\sqrt{3}$

Жауабы: 6 см.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 4

Дұрыс үшбұрыштың биіктігі 12 см. Осы үшбұрышқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын табыңыз.

Шешімі:

Дөңгелектің ауданы $S = \pi r^2$ формуласымен есептелінеді. Демек, дөңгелектің радиусын табу керек.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 12$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4$$

$$a\sqrt{3} = 24$$

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

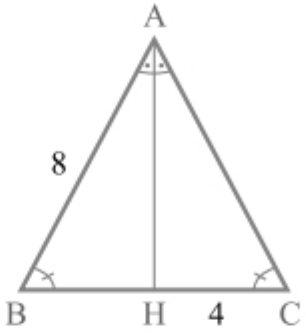
$$a = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

$$a = 8\sqrt{3}$$

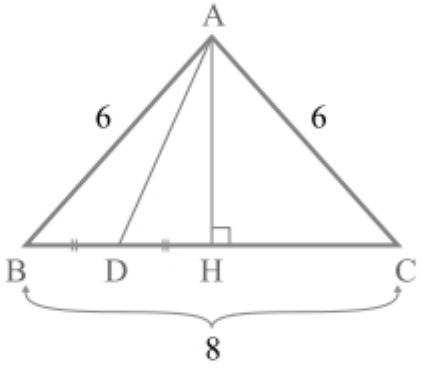
Жауабы: 16π см^2.

Есептер

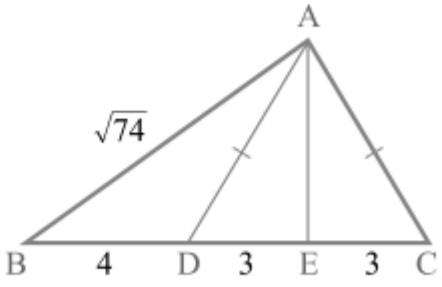
1. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



2. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

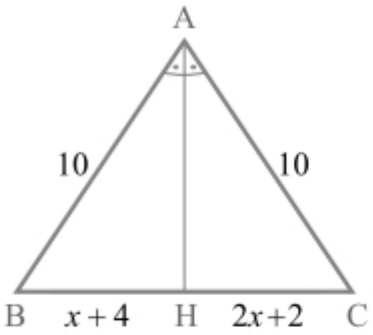


3. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

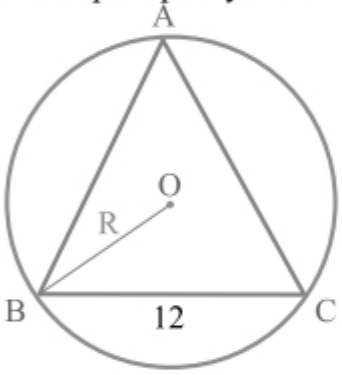


© «EduCon» басылымдары

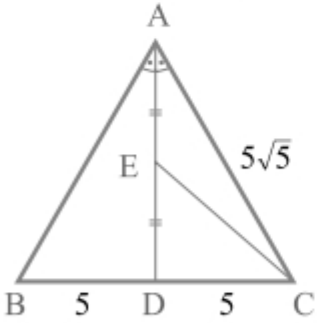
4. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



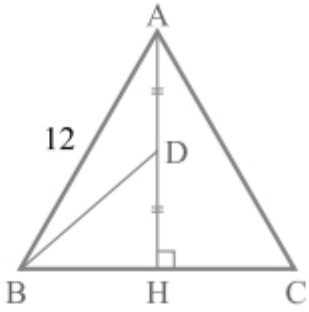
5. ABC – дұрыс үшбұрыш.
Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



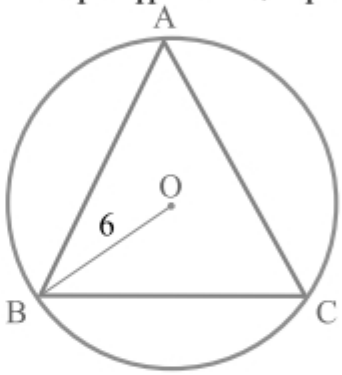
6. EC кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



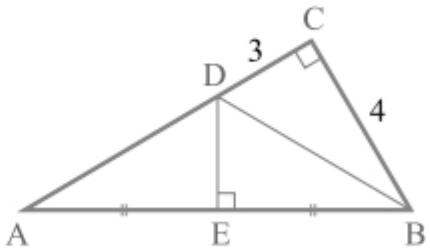
7. ABC – дұрыс үшбұрыш.
BD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



8. ABC – дұрыс үшбұрыш.
Осы үшбұрыштың периметрін табыңыз.

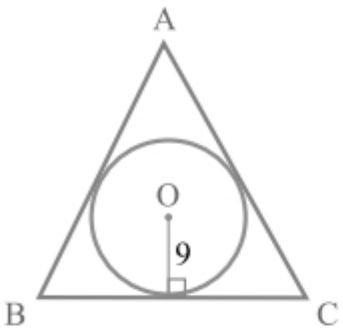


9. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

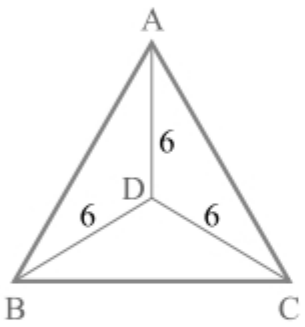


© «EduCon» басылымдары

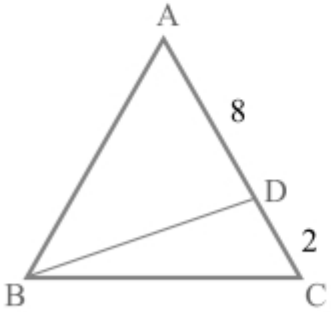
10. ABC – дұрыс үшбұрыш.
Осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.



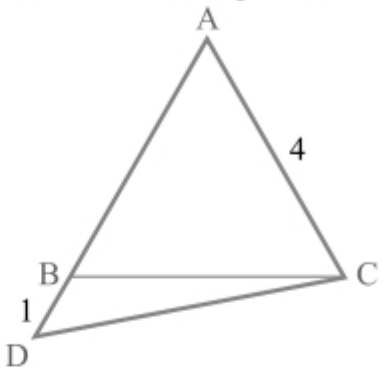
11. ABC – дұрыс үшбұрыш.
Осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.



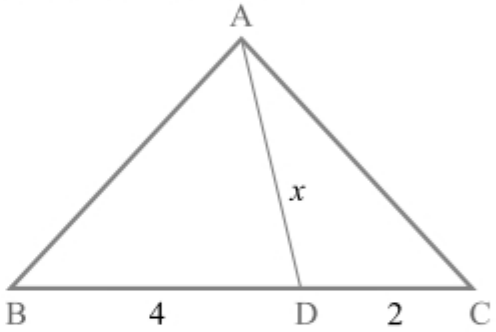
12. ABC – дұрыс үшбұрыш.
BD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



13. ABC – дұрыс үшбұрыш.
DC кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



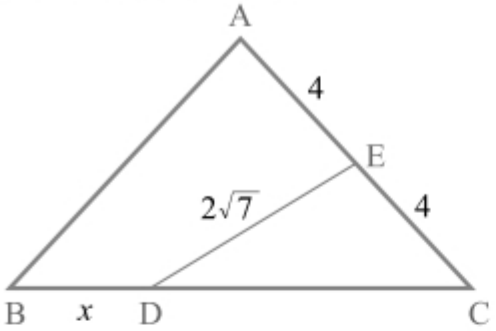
14. ABC – дұрыс үшбұрыш.
x-тің мәнін табыңыз.



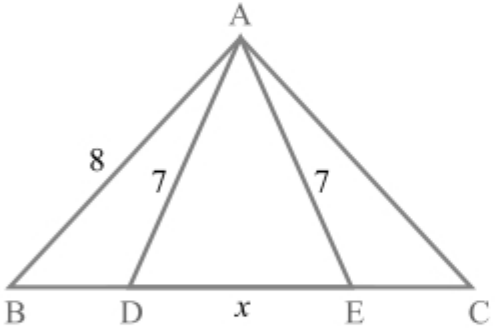
15. Теңқабырғалы үшбұрыштың ауданы $64\sqrt{3}$ см^2. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

16. ABC – дұрыс үшбұрыш.
х-тің мәнін табыңыз.



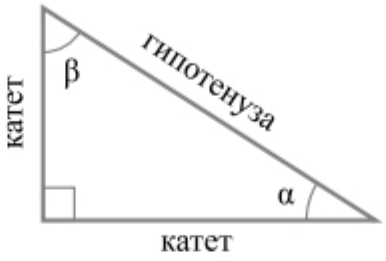
17. ABC – дұрыс үшбұрыш.
х-тің мәнін табыңыз.



18. Теңқабырғалы үшбұрыштың периметрі 36 см. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШ

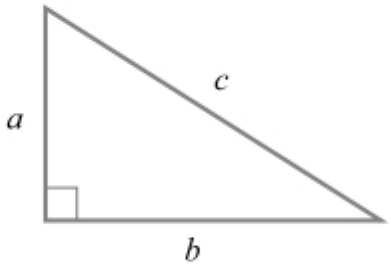
Тікбұрышты үшбұрыш – бір бұрышы тік болатын үшбұрыш.



$$\alpha + \beta = 90°$$

Пифагор теоремасы

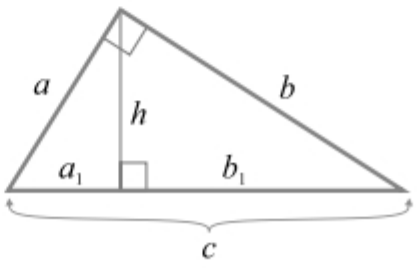
Катеттердің квадраттарының қосындысы гипотенузаның квадратына тең:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Евклид теоремасы

$$a^2 = a_1 c$$



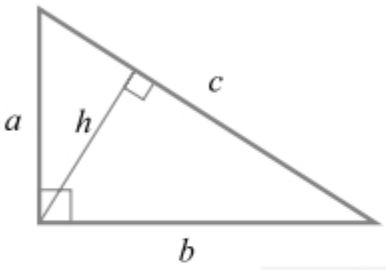
© «EduCon» басылымдары

$$b^2 = b_1 c$$

$$h^2 = a_1 b_1$$

$$h = \frac{ab}{c}$$

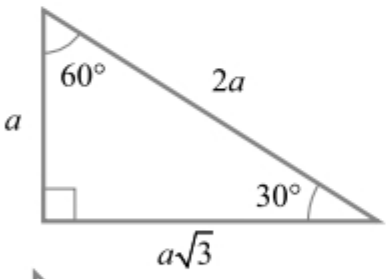
Тікбұрышты үшбұрыштың ауданы

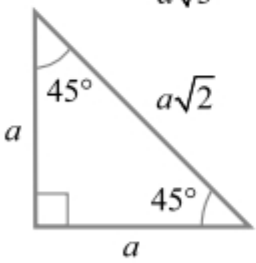


$$S = \frac{1}{2}ab$$

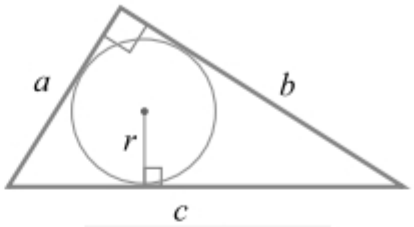
$$S = \frac{1}{2}hc$$

Ерекше тікбұрышты үшбұрыштар





Тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы

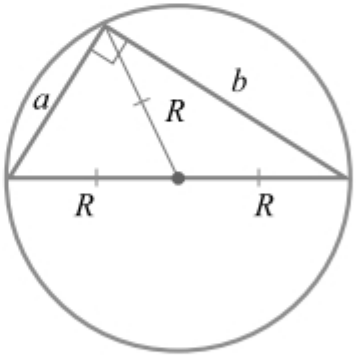


$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

Тікбұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы

Тікбұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі гипотенузаның ортасымен беттеседі. Шеңбердің радиусы гипотенузаның жартысына тең болады:



$$R = \frac{c}{2}$$

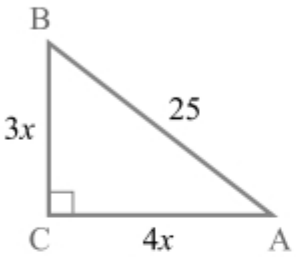
© «EduCon» басылымдары

Мысал 5

Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің қатынасы 3:4 қатынасындай, ал гипотенузасы 25 см. Осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:

Пифагор теоремасы бойынша:



$a^2+b^2=c^2$

$(3x)^2+(4x)^2=25^2$

$25x^2=25^2$

$x^2=25$

$x=5$

$a=3x=3\cdot5=15$

$b=4x=4\cdot5=20$

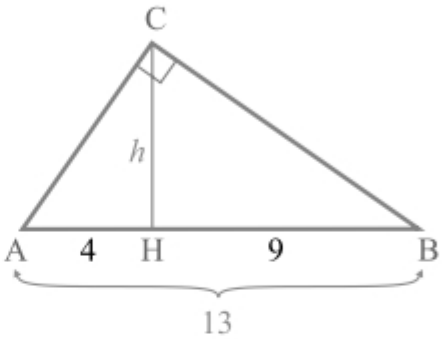
$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot15\cdot20=150$ см^2

Жауабы: 150 см^2.

Мысал 6

Тікбұрышты үшбұрышта гипотенузаға түсірілген биіктік оны ұзындықтары 4 см және 9 см болатын кесінділерге бөледі. Осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:



Евклид теоремасы бойынша:

$h^2=a_1b_1$

$h^2=4\cdot9$

$h^2=36$

$h=6$

$S=\frac{1}{2}hc=\frac{1}{2}\cdot6\cdot13=39$ см^2

Жауабы: 39 см^2.

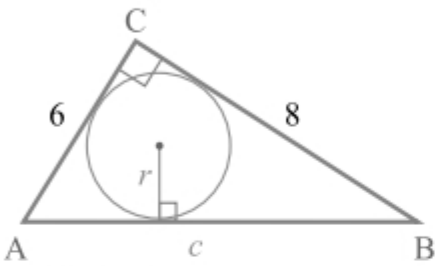
© «EduCon» басылымдары

Мысал 7

Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 6 см және 8 см. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

Шешімі:

Пифагор теоремасы бойынша:



$a^2+b^2=c^2$

$6^2+8^2=c^2$

$c^2=100$

$c=10$

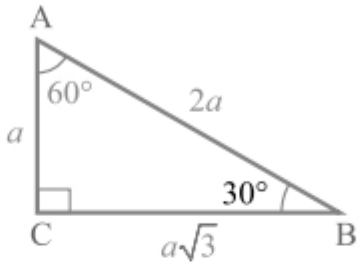
$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{6+8-10}{2}=\frac{4}{2}=2 \text{ см}$$

Жауабы: 2 см.

Мысал 8

Тікбұрышты үшбұрыштың бір бұрышы 30°, ал периметрі $6\left(\sqrt{3}+1\right)$ см. Гипотенузаның ұзындығын табыңыз.

Шешімі:



$P=a+b+c=6\left(\sqrt{3}+1\right)$

$a+a\sqrt{3}+2a=6\left(\sqrt{3}+1\right)$

$3a+a\sqrt{3}=6\left(\sqrt{3}+1\right)$

$a\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)=6\left(\sqrt{3}+1\right)$

$a\sqrt{3}=6$

$a=2\sqrt{3}$

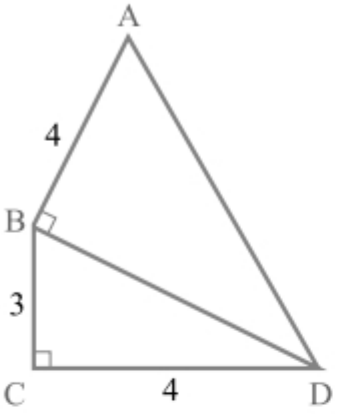
$AB=2a=2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ см

Жауабы: $4\sqrt{3}$ см.

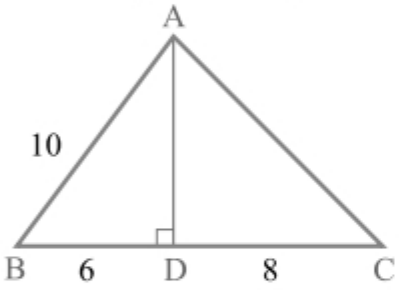
© «EduCon» басылымдары

Есептер

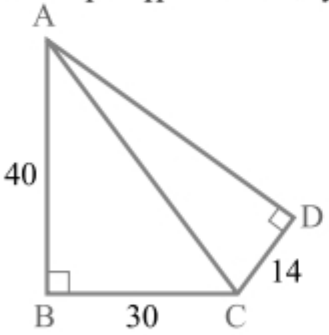
1. AD қабырғасының ұзындығын табыңыз.



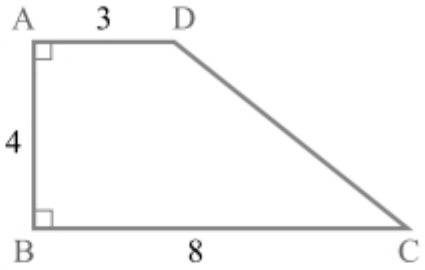
2. ABC үшбұрышының периметрін табыңыз.



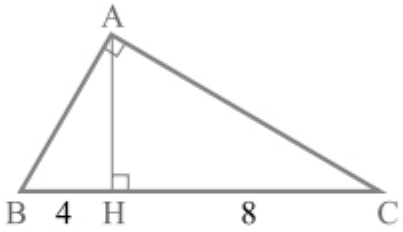
3. ADC үшбұрышының ауданын табыңыз.



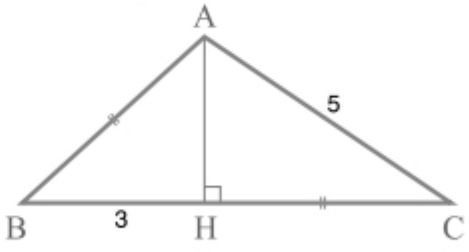
4. DC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



5. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



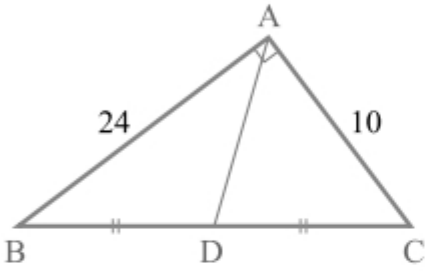
6. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



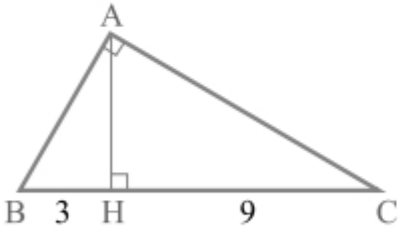
© «EduCon» басылымдары

7. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 5 см және 12 см. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

8. AD қабырғасының ұзындығын табыңыз.

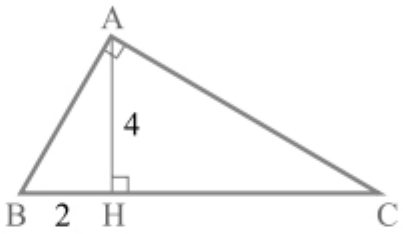


9. AH кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

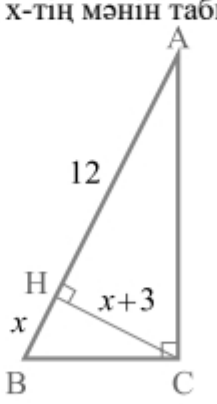


10. Тікбұрышты үшбұрыштың бір бұрышы 60°, ал периметрі $8\left(\sqrt{3}+3\right)$ см. Гипотенузаның ұзындығын табыңыз.

11. AHC үшбұрышының ауданын табыңыз.

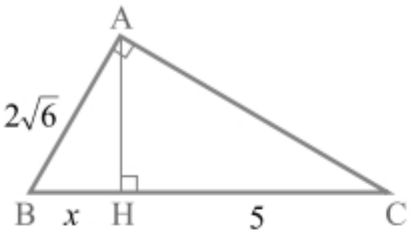


12. x-тің мәнін табыңыз.

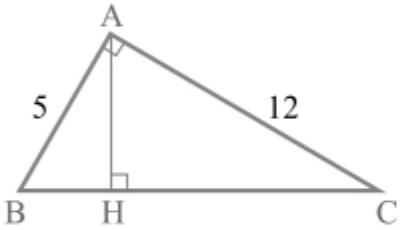


© «EduCon» басылымдары

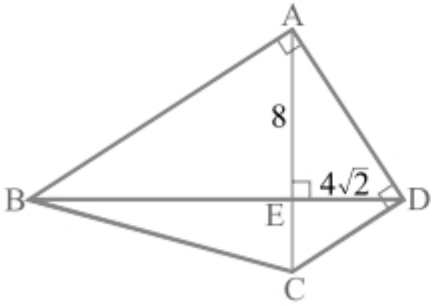
13. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



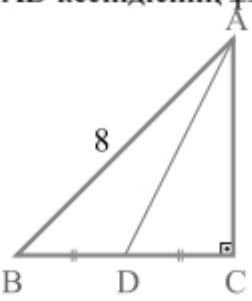
14. AH кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



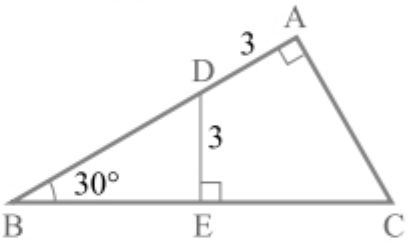
15. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



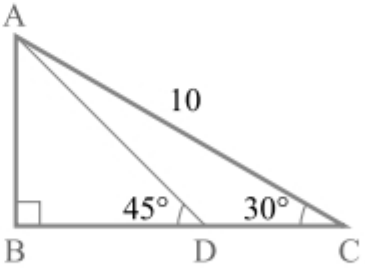
16. ΔABC – теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



17. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



18. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

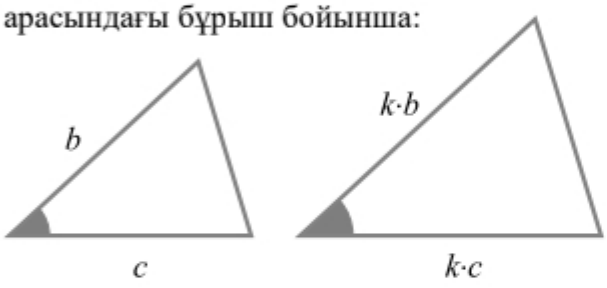


© «EduCon» басылымдары

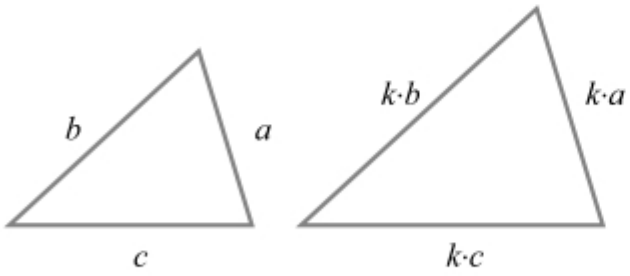
ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ҰҚСАСТЫҚ БЕЛГІЛЕРІ

1. Екі бұрыш бойынша:

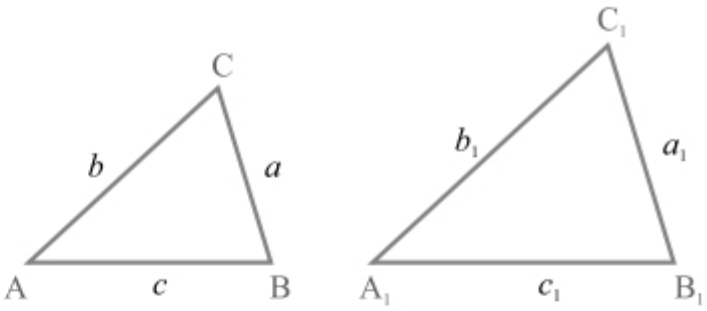
2. Екі пропорционал қабырға мен олардың арасындағы бұрыш бойынша:



3. Үш пропорционал қабырға бойынша:



ҰҚСАС ҮШБҰРЫШТАР



$A_1B_1C_1 \sim ABC$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{h_1}{h} = \frac{m_1}{m} = \frac{l_1}{l} = \frac{r_1}{r} = \frac{R_1}{R} = \frac{P_1}{P} = k$$

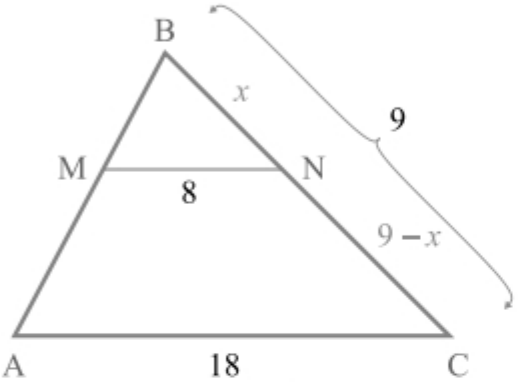
$$\frac{S_1}{S} = k^2$$

© «EduCon» басылымдары

Мысал 9

ABC үшбұрышында AB және BC қабырғаларынан сәйкесінше M және N нүктелері алынды. MN кесіндісі AC қабырғасына параллель. Егер $BC = 9$ см, $MN = 8$ см, және $AC = 18$ см, болса, онда CN кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

Шешімі:



ABC және MBN үшбұрыштары – ұқсас үшбұрыштар.

$ABC \sim MBN$

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$$

$$\frac{9}{x} = \frac{18}{8}$$

$$18x = 72$$

$$x = 4$$

$$CN = 9 - x = 9 - 4 = 5 \text{ см}$$

Жауабы: 5 см.

Мысал 10

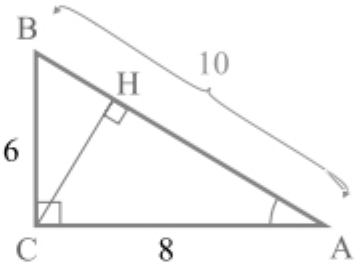
Катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тік бұрыштан перпендикуляр жүргізілді. Пайда болған үшбұрыштардың аудандарын табыңыз.

Шешімі:

BCA және CHA үшбұрыштары – ұқсас үшбұрыштар.

$BCA \sim CHA$

Пифагор теоремасы бойынша:



$$k = \frac{BA}{CA} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$BA = 10$

$$\frac{S_{BCA}}{S_{CHA}} = k^2$$

$$\frac{24}{S_{CHA}} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\frac{24}{S_{CHA}} = \frac{25}{16}$$

$$S_{BCA} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2$$

$$S_{CHA} = 15{,}36 \text{ см}^2$$

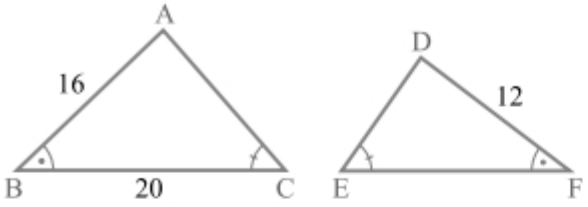
$$S_{CHB} = S_{BCA} - S_{CHA} = 24 - 15{,}36 = 8{,}64 \text{ см}^2$$

Жауабы: 15,36 см^2 және 8,64 см^2.

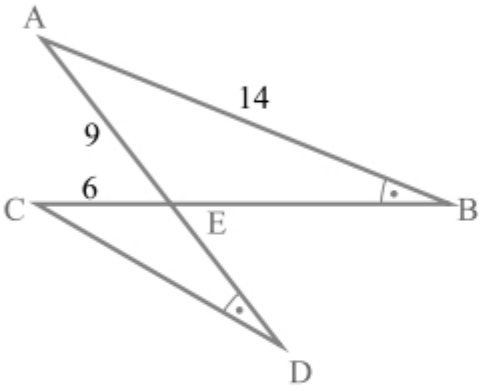
© «EduCon» басылымдары

Есептер

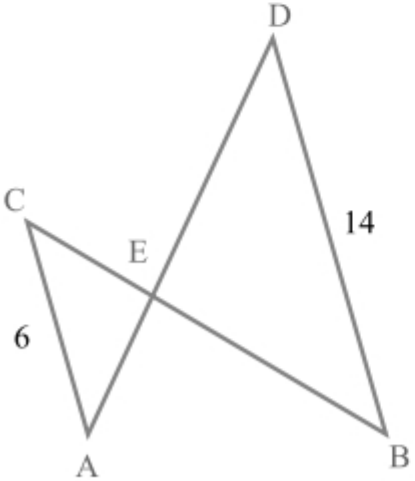
1. EF кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



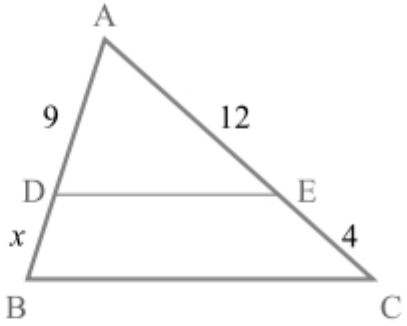
2. CD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



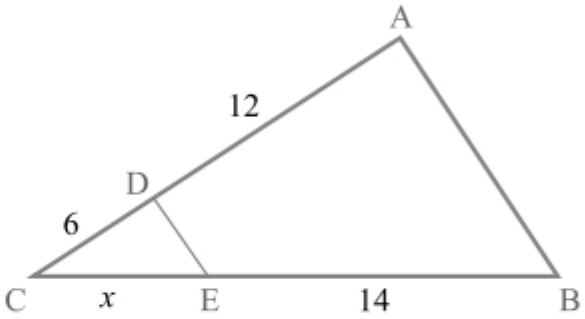
3. CA || DB. AD = 15 см. DE кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



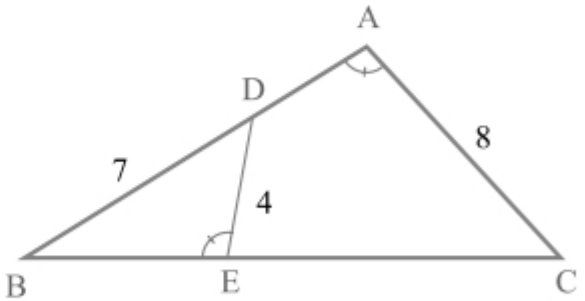
4. DE || BC. x-тің мәнін табыңыз.



5. DE || AB. x-тің мәнін табыңыз.

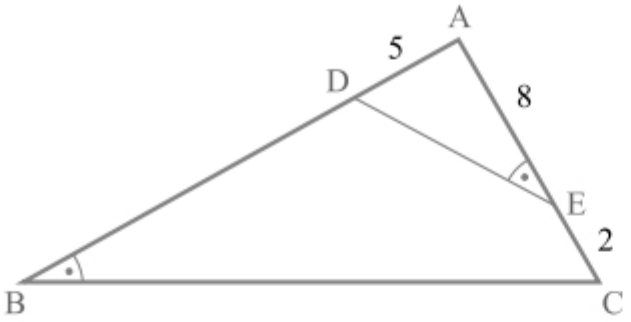


6. BC кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

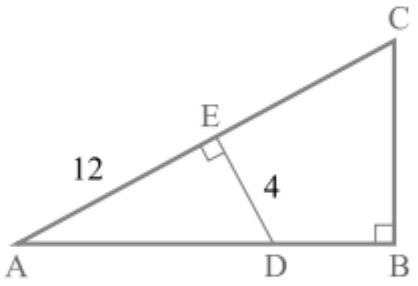


© «EduCon» басылымдары

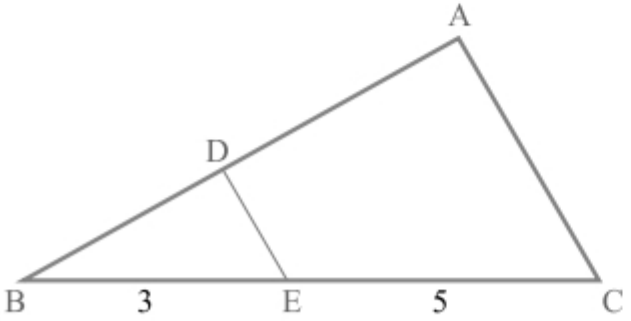
7. BD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



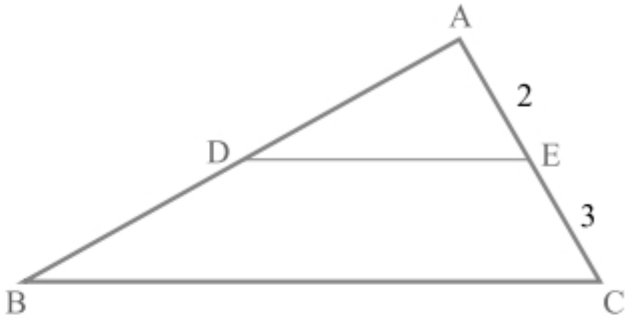
8. $AB = 18$ см. AC кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



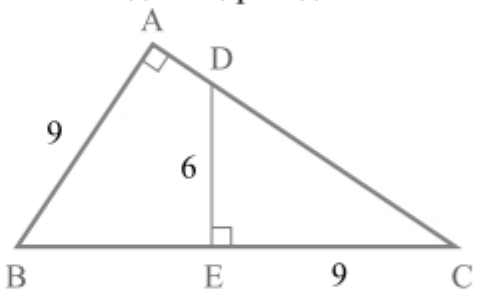
9. Егер $DE \parallel AC$, $S_{EDAC} = 11$ см^2 болса, онда BDE үшбұрышының ауданын табыңыз.



10. Егер $DE \parallel BC$, $S_{ADE} = 8$ см^2 болса, онда BDEC төртбұрышының ауданын табыңыз.



11. AC кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



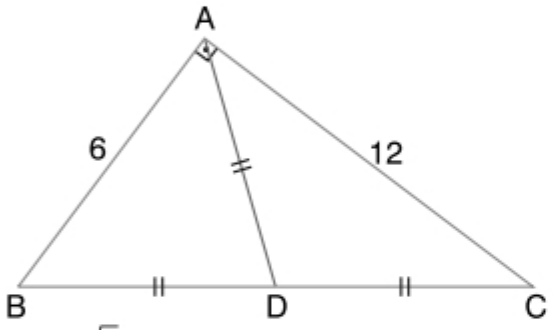
12. Екі ұқсас үшбұрыштардың аудандарының қатынасы 9:1 қатынасындай. Бірінші үшбұрыштың қабырғалары 12 см, 21см және 27 см болса, онда екінші үшбұрыштың қабырғаларын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №5

1. Дұрыс үшбұрыштың қабырғасы $4\sqrt{3}$ см. Осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.
   A) 1 см
   B) 4 см
   C) 3 см
   D) 2 см
   E) 6 см

2. AD – медиана. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

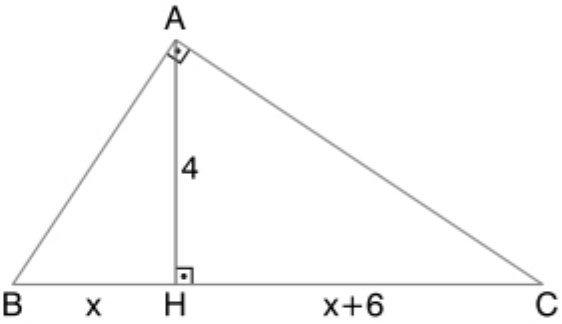


   A) $6\sqrt{5}$ см
   B) 6 см
   C) $3\sqrt{5}$ см
   D) 9 см
   E) 6,5 см

3. Тікбұрышты үшбұрышта гипотенузаға түсірілген биіктік оны ұзындықтары 9 см және 16 см болатын кесінділерге бөледі. Тікбұрышты үшбұрышты бөлу арқылы пайда болған үшбұрыштардың аудандарын табыңыз.
   A) 100 см^2
   B) 54 см^2
   C) 84 см^2
   D) 120 см^2
   E) 96 см^2
   F) 60 см^2
   G) 102 см^2
   H) 72 см^2

4. Теңқабырғалы үшбұрыштың ауданы $24\sqrt{3}$ см^2. Үшбұрыштың қабырғасын табыңыз.
   A) $3\sqrt{6}$ см
   B) $4\sqrt{3}$ см
   C) $2\sqrt{6}$ см
   D) $4\sqrt{6}$ см
   E) $3\sqrt{3}$ см

5. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

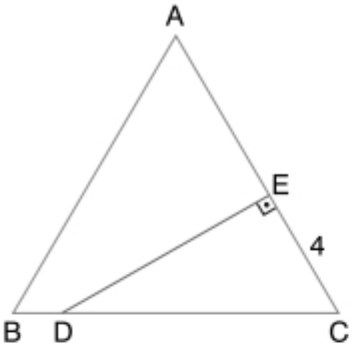


   A) 2 см
   B) 6 см
   C) 12 см
   D) 10 см
   E) 14 см

6. Тікбұрышты үшбұрышта гипотенузаға түсірілген биіктік аудандары 54 см^2 және 6 см^2 болатын үшбұрыштарға бөледі. Биіктік гипотенузаны қандай кесінділерге бөледі?
   A) 20 см
   B) 17 см
   C) 18 см
   D) 2 см
   E) 3 см
   F) 8 см
   G) 16 см
   H) 6 см

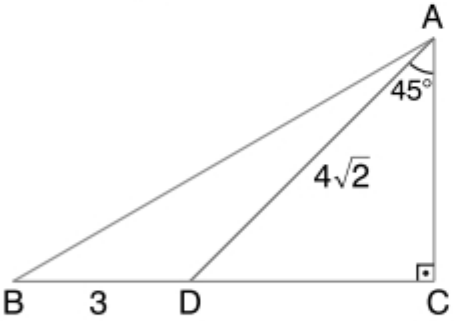
© «EduCon» басылымдары

7. ΔABC – дұрыс үшбұрыш.
DE кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



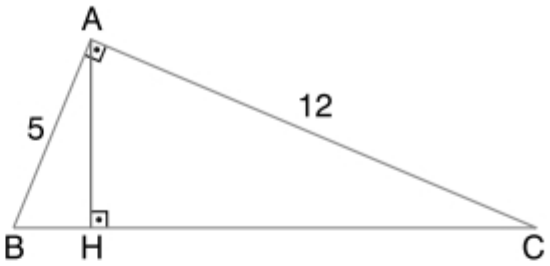
A) $4\sqrt{3}$ см
B) 8 см
C) $2\sqrt{3}$ см
D) 12 см
E) 10 см

8. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



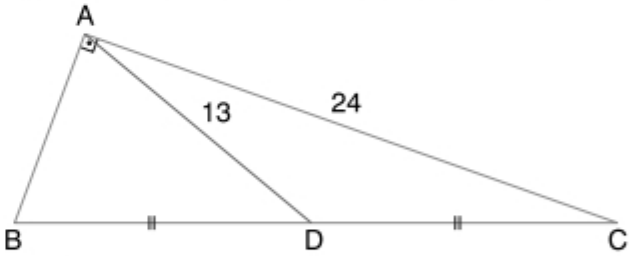
A) 8 см^2
B) 16 см^2
C) 14 см^2
D) 28 см^2
E) 12 см^2

9. AH кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



A) $\frac{60}{13}$ см
B) $\frac{30}{13}$ см
C) 13 см
D) $\frac{13}{2}$ см
E) 15 см

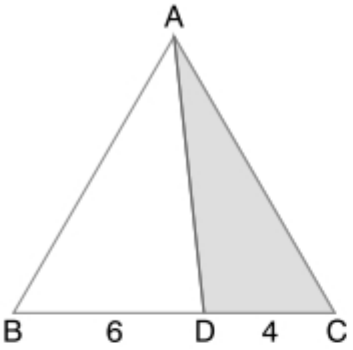
10. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) 15 см
B) 13 см
C) 9 см
D) 5 см
E) 10 см

© «EduCon» басылымдары

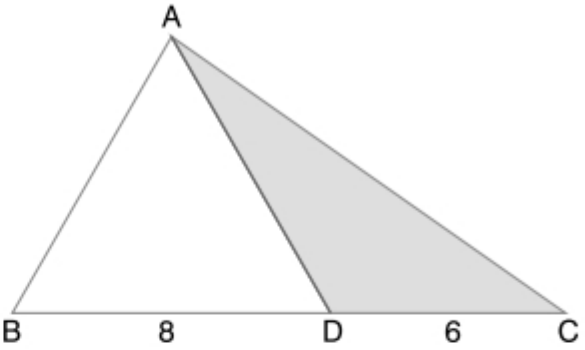
11. ΔABC – дұрыс үшбұрыш.
ADC үшбұрышының ауданын табыңыз.



A) $15\sqrt{3}$ см^2
B) $25\sqrt{3}$ см^2
C) $10\sqrt{3}$ см^2
D) $14\sqrt{3}$ см^2
E) $16\sqrt{3}$ см^2

12. Тікбұрышты үшбұрыштың ауданы 24 см^2. Егер катеттерінің біреуі екіншісінен 2 см артық болса, онда катеттердің ұзындықтарын табыңыз.
A) 10 см
B) 2 см
C) 8 см
D) 18 см
E) 12 см
F) 6 см
G) 16 см
H) 4 см

13. ΔABC – дұрыс үшбұрыш.
ADC үшбұрышының ауданын табыңыз.

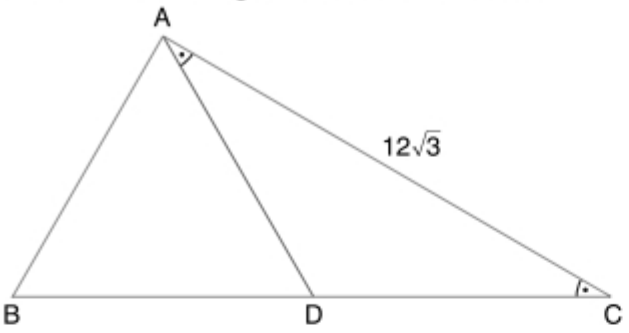


A) $49\sqrt{3}$ см^2
B) $28\sqrt{3}$ см^2
C) $21\sqrt{3}$ см^2
D) $32\sqrt{3}$ см^2
E) $36\sqrt{3}$ см^2

14. ABC үшбұрышында AB және BC қабырғаларынан сәйкесінше M және N нүктелері алынды. MN кесіндісі – орта сызық. ABC үшбұрышының ауданы 4 см^2. BMN үшбұрышының ауданын табыңыз.
A) 1 см^2
B) 3 см^2
C) 2 см^2
D) 0,5 см^2
E) 2,5 см^2

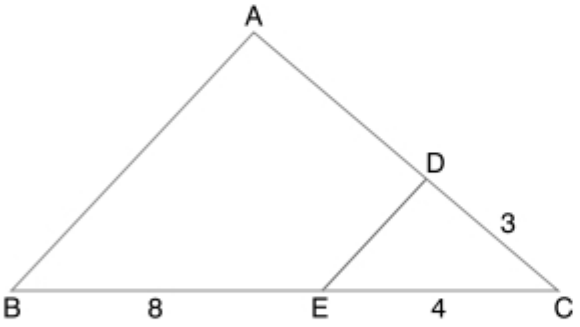
© «EduCon» басылымдары

15. ΔABD – дұрыс үшбұрыш.
AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



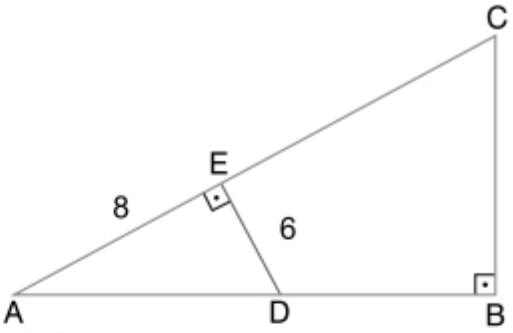
A) 24 см
B) 6 см
C) 16 см
D) 12 см
E) 18 см

16. $DE \parallel AB$. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



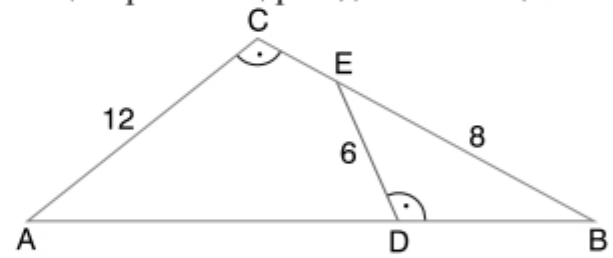
A) 6 см
B) 14 см
C) 9 см
D) 12 см
E) 5 см

17. Егер $CB = 15$ см болса, онда EC кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



A) 25 см
B) 20 см
C) 12 см
D) 17 см
E) 13 см

18. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) 14 см
B) 24 см
C) 12 см
D) 16 см
E) 10 см

© «EduCon» басылымдары

ТАРАУДЫ БЕКІТУ ТЕСТІ №1

1. ABC сүйір бұрышты үшбұрышта CD және AE биіктіктері жүргізілген. Егер $AB = 12$ см, $AD = BC = 8$ см болса, онда көрсетілген биіктіктердің ұзындықтарын табыңыз.
   A) $2\sqrt{3}$ см
   B) $5\sqrt{2}$ см
   C) $4\sqrt{2}$ см
   D) $\sqrt{6}$ см
   E) $6\sqrt{3}$ см
   F) $2\sqrt{2}$ см
   G) $4\sqrt{3}$ см
   H) $6\sqrt{5}$ см

2. ABC үшбұрышында M, N және P нүктелері сәйкесінше AB, BC және AC қабырғаларында орналасқан. Егер $AM : MB = 1 : 3$, $BN : NC = 2 : 3$, $AP : PC = 4 : 1$ және ABC үшбұрышының ауданы 100 см^2 болса, онда MNP үшбұрышының ауданын табыңыз.
   A) 62 см^2
   B) 48 см^2
   C) 36 см^2
   D) 38 см^2
   E) 56 см^2

3. ABC сүйір бұрышты үшбұрышта BD биіктігі жүргізілді. Егер $AC = 4$ см, $BD = 2\sqrt{2}$ см, $AD = BC$ болса, онда үшбұрыштың қалған қабырғаларының ұзындықтарын табыңыз.
   A) $4\sqrt{3}$ см
   B) $\sqrt{17}$ см
   C) $\sqrt{15}$ см
   D) 4 см
   E) 3 см
   F) $\sqrt{5}$ см
   G) $6\sqrt{7}$ см
   H) 5 см

4. ABC үшбұрышында M, N және P нүктелері сәйкесінше AB, BC және AC қабырғаларында орналасқан. Егер $AM : MB = 3 : 7$, $BN : NC = 1 : 4$, $AP : PC = 2 : 3$, және ABC үшбұрышының ауданы 150 см^2 болса, онда MNP үшбұрышының ауданын табыңыз
   A) 60 см^2
   B) 46 см^2
   C) 32 см^2
   D) 39 см^2
   E) 58 см^2

© «EduCon» басылымдары

5. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы 8 см және 15 см, ал олардың арасындағы бұрыштың тангенсі 0,75 болса, онда осы үшбұрыштың ауданын табыңыз.
   A) 72 см^2
   B) 48 см^2
   C) 36 см^2
   D) 42 см^2
   E) 28 см^2

6. Үшбұрыштың екі қабырғасы сәйкесінше 6 см және 8 см, ал оларға жүргізілген медианалар өзара перпендикуляр. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.
   A) $2\sqrt{7}$ см^2
   B) $4\sqrt{11}$ см^2
   C) $3\sqrt{13}$ см^2
   D) $6\sqrt{5}$ см^2
   E) $2\sqrt{14}$ см^2

7. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы $4\sqrt{10}$, ал оған жүргізілген медиана $3\sqrt{10}$. Үшбұрыштың табанының ұзындығын табыңыз.
   A) 10 см
   B) 12 см
   C) 14 см
   D) 8 см
   E) 6 см

8. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына түсірілген биіктік 36 см, ал іштей сызылған шеңбердің радиусы 10 см. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.
   A) 540 см^2
   B) 460 см^2
   C) 320 см^2
   D) 480 см^2
   E) 400 см^2

9. Катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлерінің арақашықтығын табыңыз.
   A) $\sqrt{5}$ см
   B) $2\sqrt{3}$ см
   C) $3\sqrt{3}$ см
   D) $5\sqrt{5}$ см
   E) $4\sqrt{5}$ см

10. Үшбұрыштың бір қабырғасы 26 см, ал қалған екі қабырғаға жүргізілген медианалар сәйкесінше 30 см және 39 см. Үшбұрыштың ауданын табыңыз.
    A) 240 см^2
    B) 720 см^2
    C) 360 см^2
    D) 480 см^2
    E) 640 см^2

© «EduCon» басылымдары

11. ABC үшбұрышында AM медианасы BN медианасына перпендикуляр. Егер $AM = 3$ см, $BN = 4$ см болса, онда ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.
A) 4 см^2
B) 3 см^2
C) 6 см^2
D) 8 см^2
E) 5 см^2

12. ABC тікбұрышты үшбұрышта: $BC = 4$ см, $\angle C = 90°$, ал үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы 1 см. Осы үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлерінің арақашықтығын табыңыз.
A) $0{,}5\sqrt{5}$ см
B) $2\sqrt{3}$ см
C) $3\sqrt{5}$ см
D) $0{,}5\sqrt{3}$ см
E) $\sqrt{5}$ см

13. ABC үшбұрышында: $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $AC = 4$ см. BC және AC қабырғаларынан сәйкесінше D және E нүктелері алынды. Егер $DC = EC = 2$ см болса, онда DE кесіндісінің ұзындығын табыңыз.
A) $3\sqrt{2}$ см
B) $2\sqrt{2}$ см
C) $3\sqrt{3}$ см
D) $3\sqrt{5}$ см
E) $\sqrt{7}$ см

14. ABC үшбұрышында: $\angle B = 30°$, $AB = 4$ см, $BC = 6$. B бұрышының биссектрисасы AC қабырғасын D нүктесінде қияды. ABD үшбұрышының ауданын табыңыз.
A) $4{,}2$ см^2
B) $3{,}6$ см^2
C) $5{,}2$ см^2
D) $2{,}4$ см^2
E) $4{,}8$ см^2

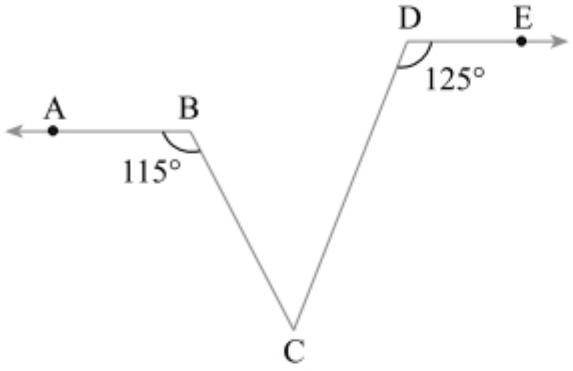
15. Теңбүйірлі үшбұрыштың екі қабырғасы сәйкесінше 10 см және 14 см. Үшбұрыштың табанындағы бұрыштың биссектрисасының ұзындығын табыңыз.
A) $\sqrt{53}$ см
B) 6 см
C) 7 см
D) 4 см
E) $3\sqrt{19}$ см
F) $\frac{5\sqrt{133}}{6}$ см
G) $\sqrt{51}$ см
H) $\frac{7\sqrt{85}}{6}$ см

16. Үшбұрыштың екі қабырғасы сәйкесінше 12 см және 16 см. Егер осы қабырғаларға жүргізілген медианалар өзара перпендикуляр болса, онда үшінші қабырғаның ұзындығын табыңыз.
A) $4\sqrt{3}$ см
B) $2\sqrt{5}$ см
C) $5\sqrt{3}$ см
D) $6\sqrt{2}$ см
E) $4\sqrt{5}$ см

© «EduCon» басылымдары

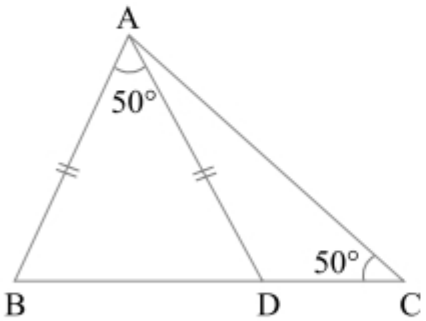
ТАРАУДЫ БЕКІТУ ТЕСТІ №2

1. BA ∥ DE. BCD бұрышының мәнін табыңыз.



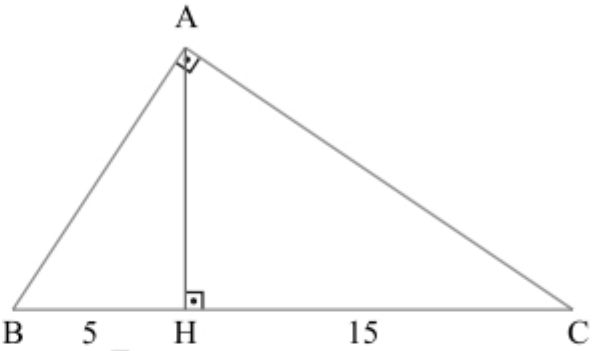
A) 60°
B) 90°
C) 70°
D) $\frac{\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{2}$
F) $\frac{\pi}{6}$
G) 30°
H) 45°

2. DAC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



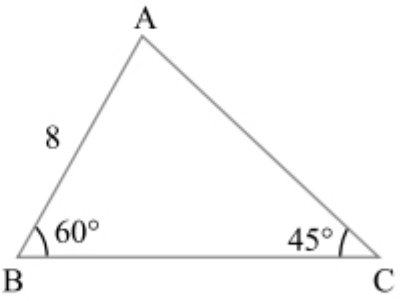
A) 30°
B) 25°
C) 20°
D) 15°
E) 10°

3. AH биіктігі ABC тікбұрышты үшбұрышын екі үшбұрышқа бөледі. Осы үшбұрыштардың аудандарын табыңыз.



A) $25\sqrt{3}$ см
B) $37{,}5\sqrt{3}$ см
C) $30\sqrt{3}$ см
D) $22{,}5\sqrt{3}$ см
E) $12{,}5\sqrt{3}$ см
F) $35\sqrt{3}$ см
G) $20\sqrt{3}$ см
H) $27{,}5\sqrt{3}$ см

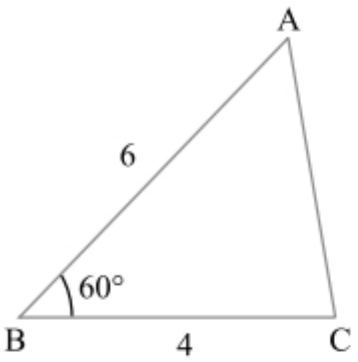
4. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) 3 см
B) $3\sqrt{6}$ см
C) 4 см
D) $4\sqrt{6}$ см
E) 2 см

© «EduCon» басылымдары

5. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.

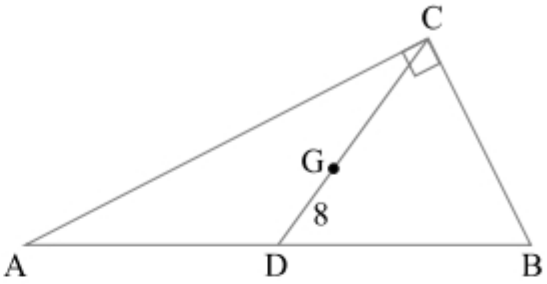


A) $3\sqrt{7}$ см
B) 5 см
C) 4 см
D) $2\sqrt{7}$ см
E) 3 см

6. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 5 см және 12 см. Тік бұрыштың биссектрисасы гипотенузаны қандай кесінділерге бөлетінін табыңыз.

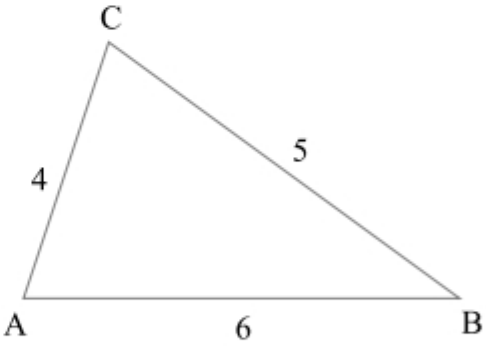
A) $\frac{17}{3}$ см
B) $\frac{156}{17}$ см
C) $\frac{65}{17}$ см
D) 5 см
E) $\frac{11}{2}$ см
F) 8 см
G) $\frac{21}{4}$ см
H) $\frac{22}{3}$ см

7. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. AB қабырғасының ұзындығын табыңыз.



A) 16 см
B) 24 см
C) 32 см
D) 48 см
E) 54 см

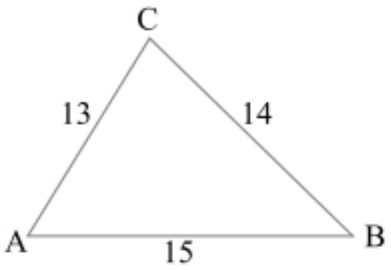
8. CB қабырғасына түсірілген медианаың ұзындығын табыңыз.



A) $\frac{\sqrt{46}}{2}$ см
B) $\frac{\sqrt{41}}{3}$ см
C) 8 см
D) $\frac{\sqrt{79}}{2}$ см
E) 7 см

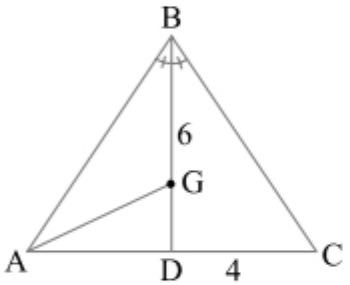
© «EduCon» басылымдары

9. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



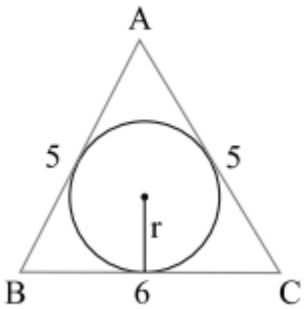
A) 84 см^2
B) 72 см^2
C) 54 см^2
D) 21 см^2
E) 36 см^2

10. G нүктесі – ABC үшбұрышының ауырлық центрі. AG кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



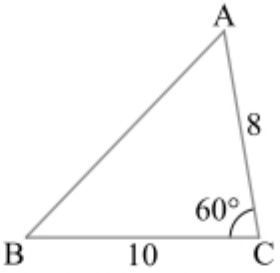
A) 3 см
B) 4 см
C) 5 см
D) 6 см
E) 8 см

11. ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



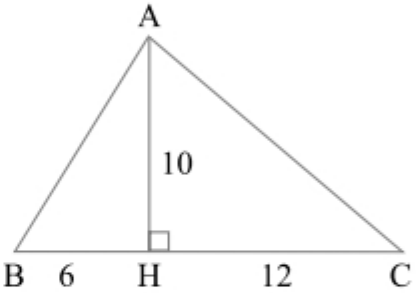
A) 2 см
B) 1,5 см
C) 3 см
D) 2,5 см
E) 1 см

12. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



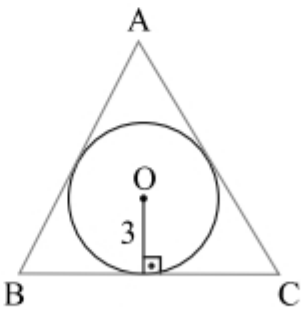
A) $24\sqrt{3}$ см^2
B) $24\sqrt{2}$ см^2
C) $20\sqrt{3}$ см^2
D) $20\sqrt{2}$ см^2
E) $28\sqrt{3}$ см^2

13. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



A) 40 см^2
B) 60 см^2
C) 70 см^2
D) 80 см^2
E) 90 см^2

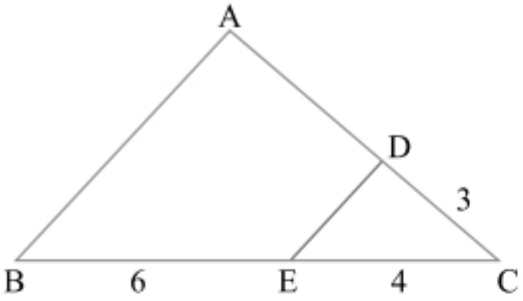
14. ABC дұрыс үшбұрышының ауданын табыңыз.



A) $9\sqrt{2}$ см^2
B) $27\sqrt{2}$ см^2
C) $18\sqrt{3}$ см^2
D) $32\sqrt{2}$ см^2
E) $27\sqrt{3}$ см^2

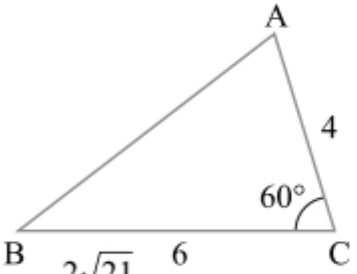
© «EduCon» басылымдары

15. DE || AB. AC қабырғасының ұзындығын табыңыз.



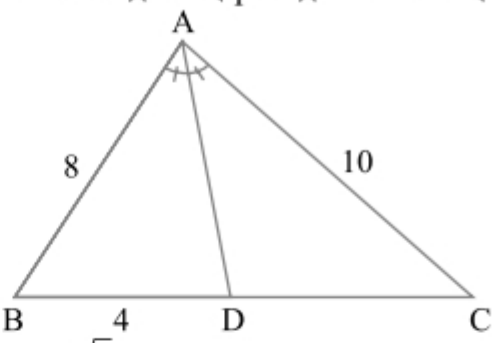
A) 7,5 см
B) 8 см
C) 8,5 см
D) 6 см
E) 6,5 см

16. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



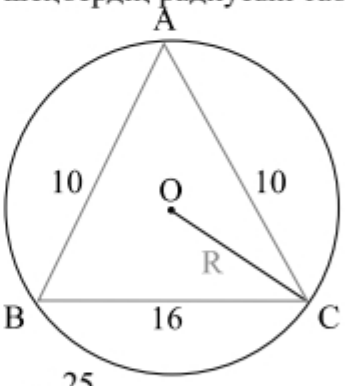
A) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ см
B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ см
C) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ см
D) 7 см
E) 3 см

17. AD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



A) $3\sqrt{5}$ см
B) $2\sqrt{15}$ см
C) $4\sqrt{5}$ см
D) $4\sqrt{15}$ см
E) $2\sqrt{3}$ см

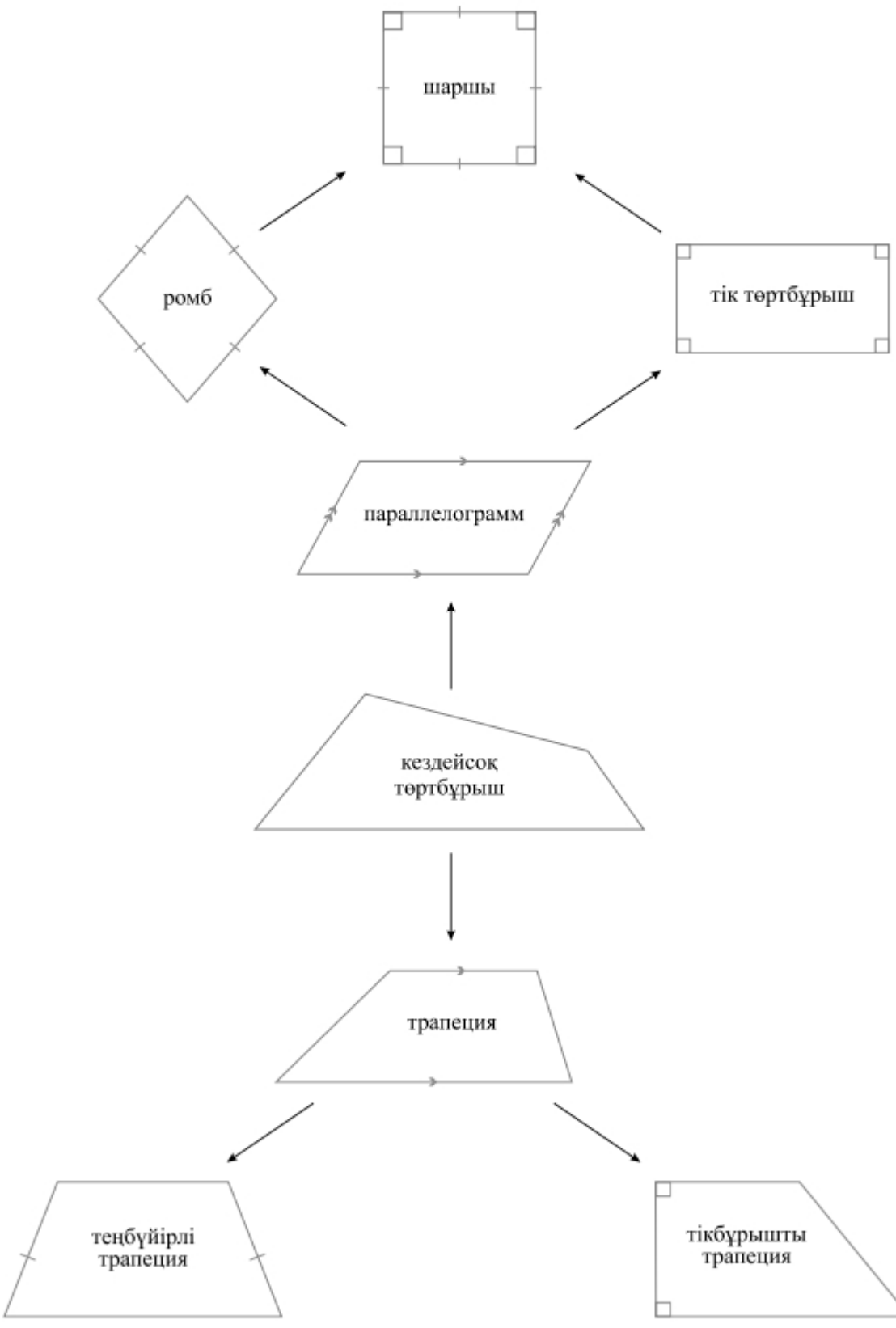
18. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.



A) $\frac{25}{3}$ см
B) $\frac{20}{3}$ см
C) $\frac{50}{3}$ см
D) 8 см
E) 7 см

© «EduCon» басылымдары

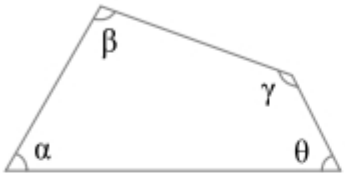
ТӨРТБҰРЫШТАРДЫҢ ТҮРЛЕРІ



КЕЗДЕЙСОҚ ТӨРТБҰРЫШ

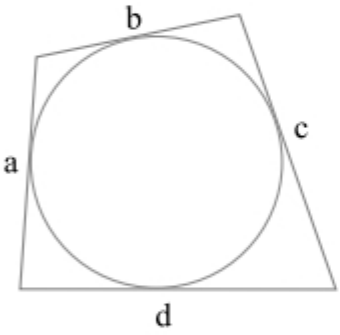
Кездейсоқ төртбұрыштың қасиеттері

1. Ішкі бұрыштарының қосындысы 360°:



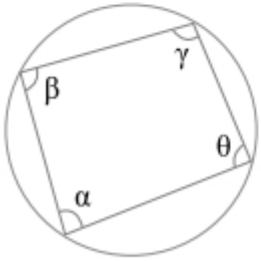
$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=360^\circ$$

2. Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылса, онда оның қарсы жатқан қабырғаларының қосындысы тең болады:



$$a+c=b+d$$

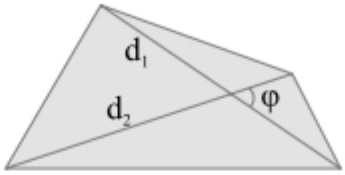
3. Егер төртбұрыш шеңберге іштей сызылса, онда оның қарсы жатқан бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болады:



$$\alpha+\gamma=180^\circ$$
$$\beta+\theta=180^\circ$$

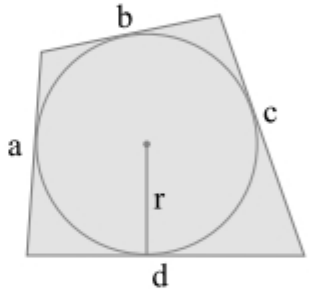
Кездейсоқ төртбұрыштың ауданы

4. Диагональдар мен арасындағы бұрыш арқылы:



$$S=\frac{d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi}{2}$$

5. Төртбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы мен жартылай периметр арқылы:

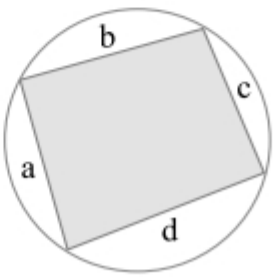


$$S=p\cdot r$$

$p=\frac{a+b+c+d}{2}$ – жартылай периметр

r – іштей сызылған шеңбердің радиусы

6. Шеңберге іштей сызылған сызылған төртбұрыштың ауданы:



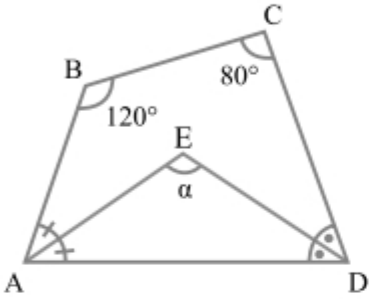
© «EduCon» басылымдары

$$S=\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$$

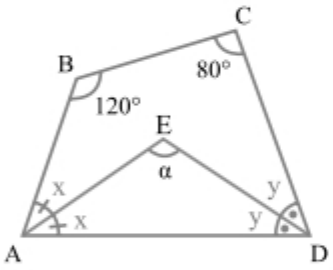
$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}-$ жартылай периметр

Мысал 1

AED бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



Шешімі:



Төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 360°:

$120°+80°+2x+2y=360°$

$2x+2y=160°$

$x+y=80°$

Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180°:

$\alpha+x+y=180°$

$\alpha+80°=180°$

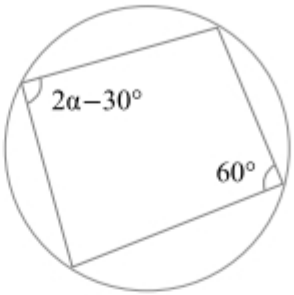
$\alpha=100°$

Жауабы: 100°.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 2

α-ның мәнін табыңыз.



Шешімі:

Егер төртбұрыш шеңберге іштей сызылса, онда оның қарсы жатқан бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болады:

$2\alpha-30°+60°=180°$

$2\alpha-30°=120°$

$2\alpha=150°$

$\alpha=75°$

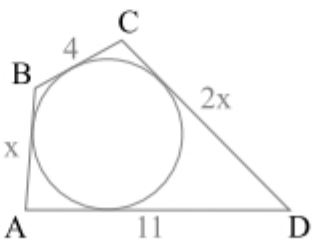
Жауабы: 75°.

Мысал 3

ABCD төртбұрышы шеңберге сырттай сызылған. Егер $BC=4$ см, $AD=11$ см және CD қабырғасы AB қабырғасынан 2 есе үлкен болса, онда AB және CD қабырғаларын табыңыз.

Шешімі:

Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылса, онда оның қарсы жатқан қабырғаларының қосындысы тең болады:



$x+2x=4+11$

$3x=15$

$x = 5$

Демек, $AB = 5$ см

$CD = 10$ см

Жауабы: 5 см; 10 см.

Мысал 4

Төртбұрыштың диагональдары 30°-тық бұрышпен қиылысады және ұзындықтары 18 см мен 24 см. Төртбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:

Төртбұрыштың ауданын оның диагональдары мен арасындағы бұрыш арқылы табамыз:

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{18 \cdot 24 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 9 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 9 \cdot 12 = 108$$

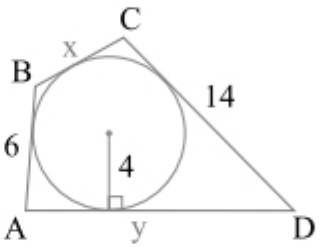
Жауабы: 108 см^2.

Мысал 5

ABCD төртбұрышы радиусы 4 см болатын шеңберге сырттай сызылған. Егер $AB = 6$ см, $CD = 14$ см болса, онда төртбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:

Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылса, онда оның қарсы жатқан қабырғаларының қосындысы тең болады:



$$x + y = 6 + 14$$

$$x + y = 20$$

Төртбұрыштың ауданын оған іштей сызылған шеңбердің радиусы мен жартылай периметр арқылы табамыз:

$$S = p \cdot r = \frac{6 + 14 + x + y}{2} \cdot 4 = \frac{20 + 20}{2} \cdot 4 =$$

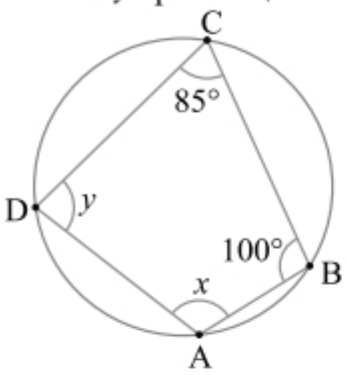
$$= 20 \cdot 4 = 80$$

Жауабы: 80 см^2.

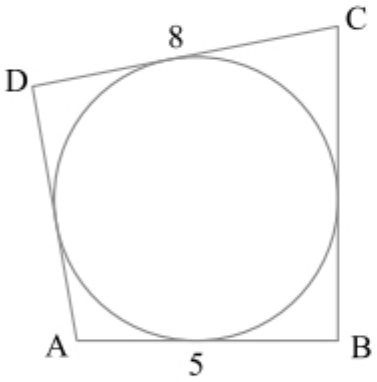
© «EduCon» басылымдары

Есептер

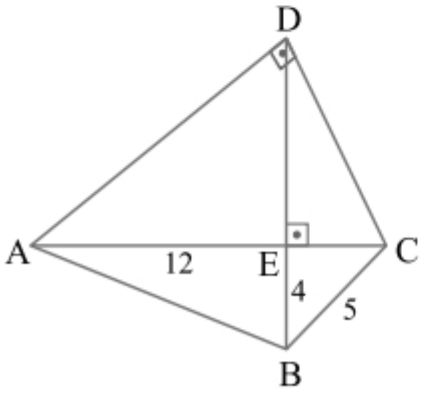
1. $x + y$ өрнегінің мәнін табыңыз.



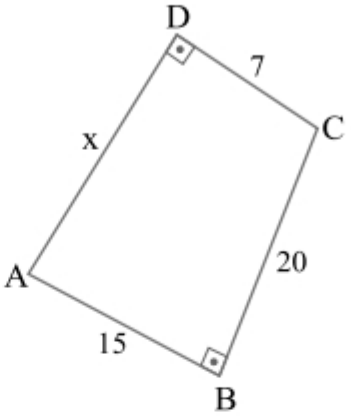
2. Шеңберге сырттай сызылған ABCD төртбұрышының периметрін табыңыз.



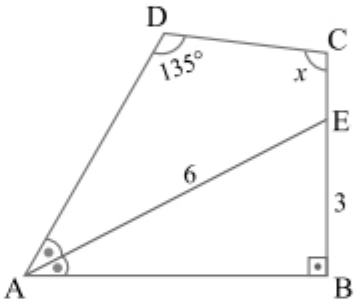
3. ABCD төртбұрышының ауданын табыңыз.



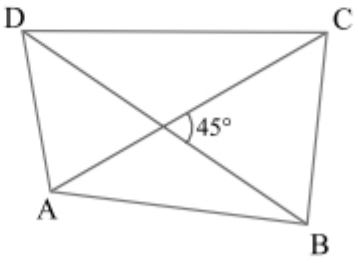
4. x-тің мәнін табыңыз.



5. x-тің мәнін табыңыз.



6. Егер $AC = 4\sqrt{2}$, $BD = 6$ болса, онда ABCD төртбұрышының ауданын табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

7. ABCD төртбұрышы шеңберге сырттай сызылған. Егер $BC = 5$ см, $AD = 19$ см және AB қабырғасы CD қабырғасынан 3 есе үлкен болса, онда AB мен CD қабырғаларын табыңыз.

8. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың периметрі 60 см. Егер оның екі қабырғасы 5 см және 17 см болса, онда қалған екі қабырғаның үлкенін табыңыз.

9. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың периметрі 44 см. Егер оның екі қабырғасы 8 см және 20 см болса, онда қалған екі қабырғаның кішісін табыңыз.

10. ABCD төртбұрышында: AC мен BD диагональдары E нүктесінде қиылысады. $DE = 4$ см, $EC = 7$ см, $AE = BE = 8$ см және $\angle AEB = 120°$. Осы төртбұрыштың ауданын табыңыз.

11. ABCD төртбұрышы радиусы 2 см болатын шеңберге сырттай сызылған. Егер $AB = 3$ см, $CD = 7$ см болса, онда төртбұрыштың ауданын табыңыз.

12. Төртбұрыштың диагональдары 60°-тық бұрышпен қиылысады және ұзындықтары 14 см мен 20 см. Төртбұрыштың ауданын табыңыз.

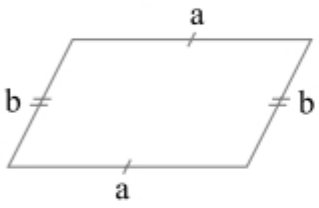
© «EduCon» басылымдары

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Қарама-қарсы қабырғалары параллель болатын төртбұрыш **параллелограмм** деп аталады.

Параллелограмның қасиеттері мен белгілері

1. Қарама-қарсы қабырғалары тең:

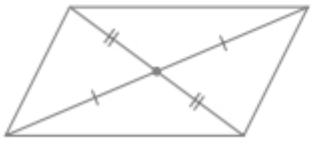


$$P = 2 \cdot (a + b)$$

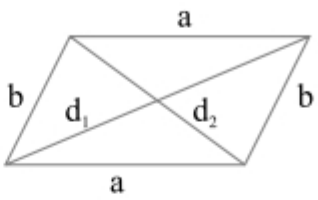
2. Қарама-қарсы бұрыштары тең:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

3. Диагональдар қиылысу нүктесімен қақ бөлінеді:



4. Диагональдарының квадраттарының қосындысы барлық қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең:

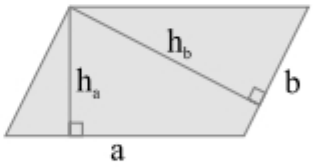


$$d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$$

Параллелограмның ауданы

1. Қабырға және оған түсірілген биіктік арқылы:

$$S = a \cdot h_a$$
$$S = b \cdot h_b$$



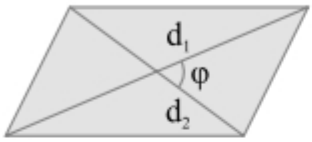
2. Екі іргелес қабырға мен арасындағы бұрыш арқылы:

$$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

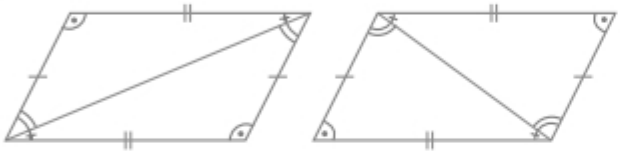
© «EduCon» басылымдары

3. Диагональдар мен арасындағы бұрыш арқылы:

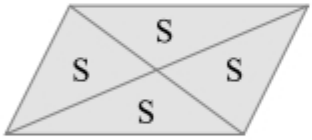
$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi}{2}$$



4. Әр диагональ параллелограмды бірдей екі үшбұрышқа бөледі:

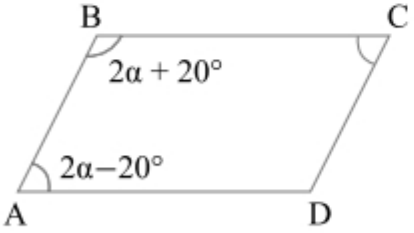


5. Екі диагональ параллелограмды төрт теңшамалы үшбұрышқа бөледі:



Мысал 1

ABCD – параллелограмм. BCD бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



Шешімі:

Параллелограмда бір қабырғаға іргелес екі бұрыштың қосындысы 180°-қа тең:

$2\alpha - 20° + 2\alpha + 20° = 180°$

$4\alpha = 180°$

$\alpha = 45°$

Параллелограмның қарама-қарсы бұрыштары тең:

$\angle C = \angle A$

$\angle C = 2\alpha - 20°$

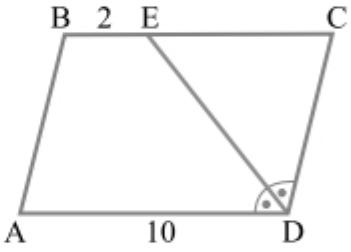
$\angle C = 2 \cdot 45° - 20°$

$\angle C = 70°$

Жауабы: 70°.

Мысал 2

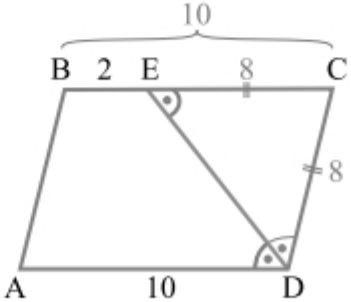
ABCD параллелограмының периметрін табыңыз.



Шешімі:

$BC \parallel AD$ болғандықтан, ішкі айқыш бұрыштар тең болады. Яғни, $\angle CED = \angle ADE$.

Демек ECD үшбұрышы теңбүйірлі үшбұрыш.



$P = 2 \cdot (a + b)$

© «EduCon» басылымдары

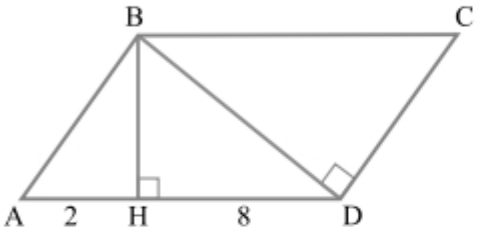
$P = 2 \cdot (10 + 8)$

$P = 36$

Жауабы: 36.

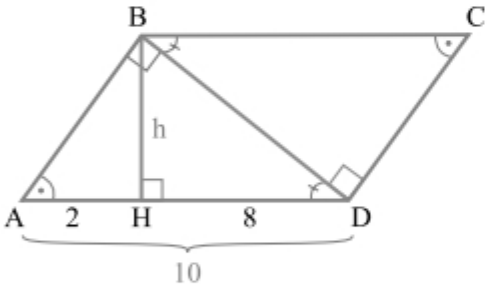
Мысал 3

ABCD параллелограмының ауданын табыңыз.

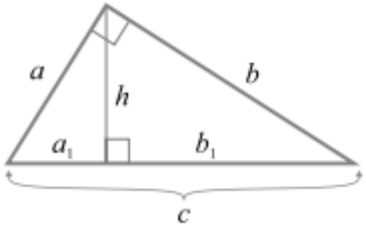


Шешімі:

Параллелограмның диагоналі оны екі тең үшбұрышқа бөледі. Демек, $\angle ABD = \angle BDC$.



ABD тікбұрышты үшбұрышта BH кесіндісі гипотенузаға түсірілген биіктік. Демек, Евклид теоремасы бойынша:



$h^2 = a_1 \cdot b_1$

$h^2 = 2 \cdot 8$

$h^2 = 16$

$h = 4$

Параллелограмның ауданын оның қабырғасы мен оған түсірілген биіктік арқылы табамыз:

$S = a \cdot h_a = 10 \cdot 4 = 40$

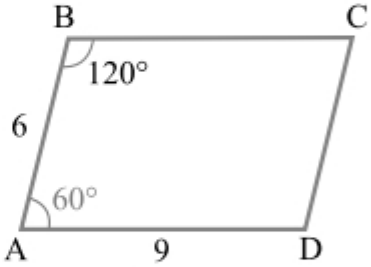
Жауабы: 40.

Мысал 4

ABCD параллелограмында: AB = 6 см, AD = 9 см, $\angle B = 120°$. Осы параллелограмның ауданын табыңыз.

Шешімі:

Параллелограмның ауданын оның екі іргелес қабырғасы мен арасындағы бұрыш арқылы табамыз:



$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$S = 9 \cdot 6 \cdot \sin 60°$

$S = 9 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

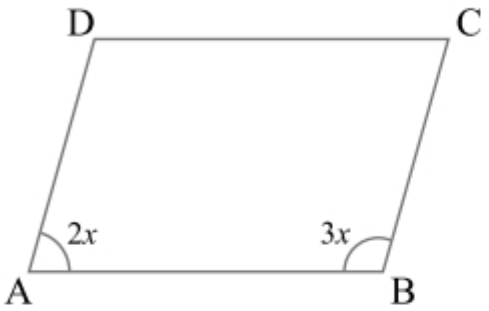
$S = 27\sqrt{3}$

Жауабы: $27\sqrt{3}$ см^2.

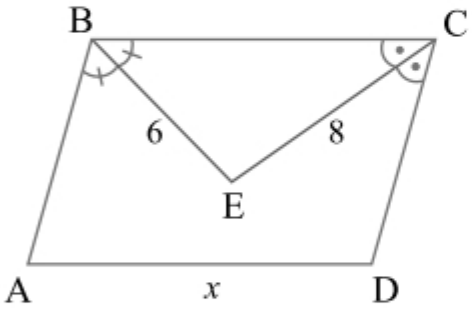
© «EduCon» басылымдары

Есептер

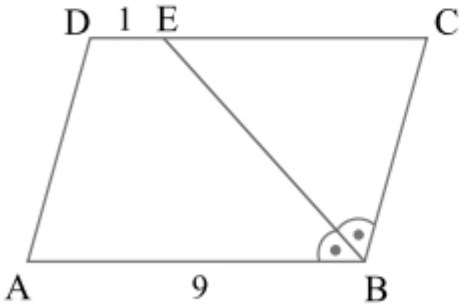
1. ABCD – параллелограмм. ADC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



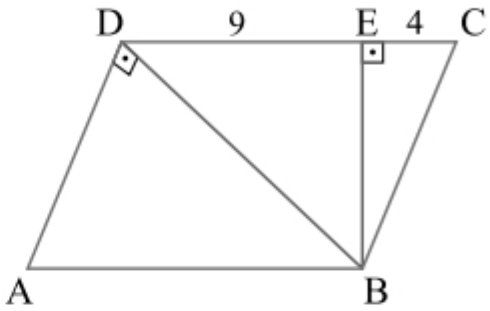
2. ABCD – параллелограмм. x-тің мәнін табыңыз.



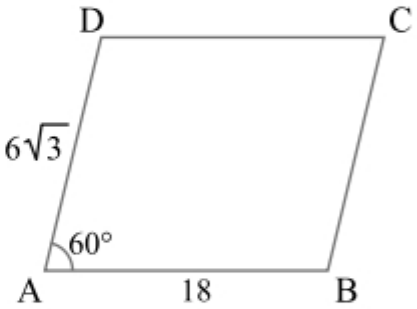
3. ABCD параллелограмының периметрін табыңыз.



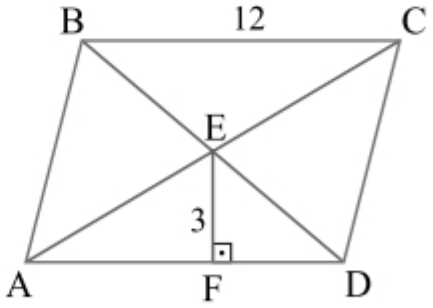
4. ABCD параллелограмының ауданын табыңыз.



5. ABCD параллелограмының ауданын табыңыз.

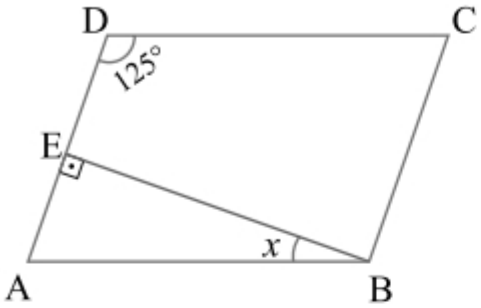


6. ABCD параллелограмының ауданын табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

7. ABCD – параллелограмм. x-тің мәнін табыңыз.

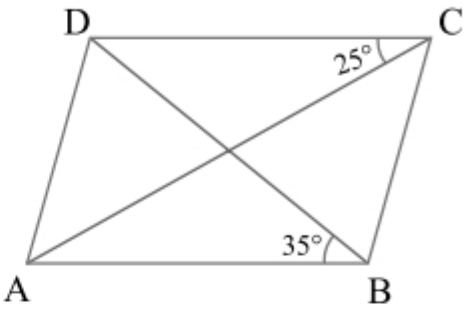


8. Параллелограмның қабырғалары 21 см және 15 см, ал бір бұрышының косинусы $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Параллелограмның ауданын табыңыз.

9. ABCD параллелограмында DE биіктігі AB қабырғасын $AE = 4$ см және $EB = 3$ см болатын кесінділерге бөледі. Егер $\angle ABC = 135^\circ$ болса, онда параллелограмның ауданын табыңыз.

10. Егер AC=12 см, BD=10 см болса, онда ABCD параллелограмының ауданын табыңыз.



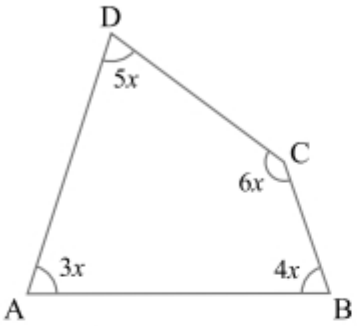
11. ABCD параллелограмының бір қабырғасы 15 см, ал оған түсірілген биіктік 8 см. Егер екінші қабырғаға түсірілген биіктік 10 см болса, онда оның ұзындығын табыңыз.

12. Параллелограмның периметрі 60 см. Екі бұрышының айырмасы 120°, ал екі қабырғасының айырмасы 6 см. Параллелограмның ауданын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

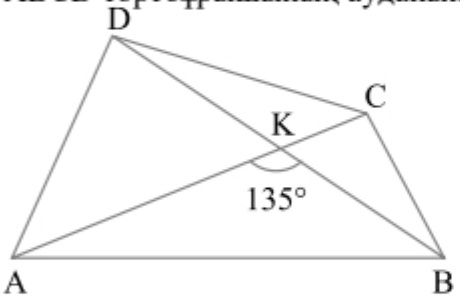
ТЕСТ №6

1. x-тің мәнін табыңыз.



A) 10°
B) 25°
C) 30°
D) 20°
E) 40°

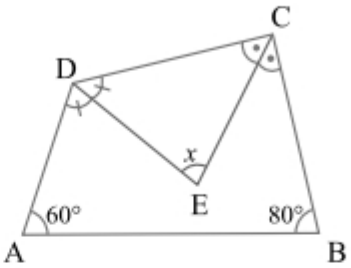
2. Егер $AC = 4\sqrt{2}$ см, DB=6 см болса, онда ABCD төртбұрышының ауданын табыңыз.



A) 10 см²
B) 12 см²
C) 14 см²
D) 16 см²
E) 18 см²

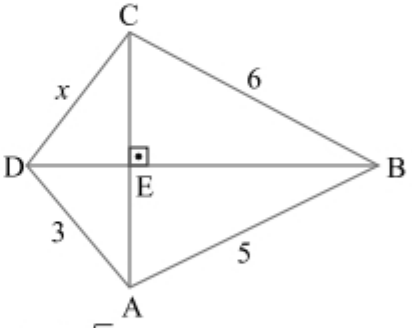
3. ABCD параллелограмында AB қабырғасына түсірілген биіктік 4 см, ал $AD = 8$ см. B бұрышының синусын табыңыз.
A) 0,5
B) 0,2
C) 2
D) 1
E) 0,4

4. x-тің мәнін табыңыз.



A) 110°
B) 100°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

5. x-тің мәнін табыңыз.

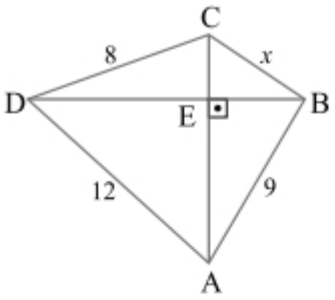


A) $3\sqrt{5}$
B) 4
C) $2\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$
E) $2\sqrt{5}$

6. Параллелограмның қабырғалары 9 см және 15 см. Бірінші қабырғаға түсірілген биіктік 10 см болса, онда екінші қабырғаға түсірілген биіктікті табыңыз.
A) 6 см
B) 8 см
C) 4 см
D) 12 см
E) 16 см

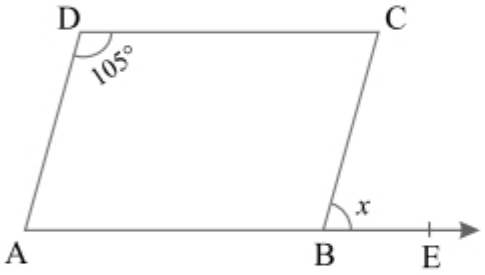
© «EduCon» басылымдары

7. x-тің мәнін табыңыз.



A) 2
B) 3
C) 1
D) 0,5
E) 4

8. ABCD – параллелограмм. x-тің мәнін табыңыз.

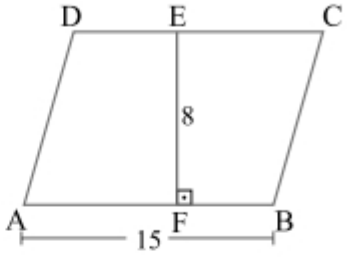


A) 105°
B) 85°
C) 75°
D) 65°
E) 55°

9. Параллелограмның бір қабырғасы екіншісінен үш есе үлкен. Егер параллелограмның периметрі 48 см болса, онда оның қабырғаларын табыңыз.

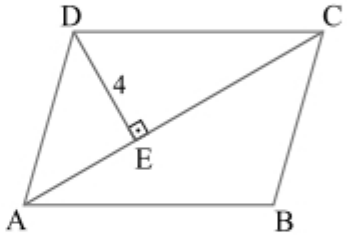
A) 4 см
B) 5 см
C) 6 см
D) 7 см
E) 3 см
F) 18 см
G) 20 см
H) 21 см

10. ABCD параллелограмының ауданын табыңыз.



A) 60
B) 140
C) 120
D) 100
E) 40

11. ABCD – параллелограмм. Егер $AC = 12$ см болса, онда оның ауданын табыңыз.



A) 24 см^2
B) 12 см^2
C) 48 см^2
D) 96 см^2
E) 64 см^2

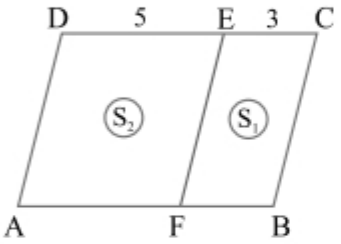
12. Параллелограмның бір бұрышы екінші бұрышынан 80°-қа үлкен. Параллелограмның бұрыштарының градустық өлшемін табыңыз.

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 100°
F) 120°
G) 130°
H) 140°

© «EduCon» басылымдары

13. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың периметрі 30 см. Егер оның екі қабырғасы 4 см және 9 см болса, онда қалған екі қабырғаның үлкенін табыңыз.
A) 6 см
B) 11 см
C) 15 см
D) 12 см
E) 16 см

14. ABCD – параллелограмм. Егер $FE \parallel BC$ болса, онда $\frac{S_1}{S_2}$ өрнегінің мәнін табыңыз.



A) 0,6
B) 0,2
C) $\frac{5}{3}$
D) 2
E) 0,3

15. Параллелограмның бір қабырғасына іргелес болатын екі бұрыштың биссектрисаларының арасындағы бұрышын табыңыз.
A) 45°
B) 60°
C) 30°
D) 120°
E) 90°

16. Параллелограмның диагональдары 4 см және 6 см, ал сүйір бұрышы 60°. Параллелограмның ауданын табыңыз.
A) $5\sqrt{3}$ см^2
B) $4\sqrt{3}$ см^2
C) $6\sqrt{2}$ см^2
D) 6 см^2
E) $8\sqrt{3}$ см^2

17. Параллелограмның доғал бұрышының биссектрисасы қарама-қарсы қабырғаны сүйір бұрыштың төбесінен санағанда 3:4 қатынасындай етіп бөледі. Егер параллелограмның периметрі 40 см болса, онда оның қабырғаларының ұзындықтарын табыңыз.
A) 6 см
B) 7 см
C) 8 см
D) 9 см
E) 10 см
F) 12 см
G) 14 см
H) 16 см

18. ABCD параллелограмының BD диагоналі AB қабырғасына перпендикуляр. Егер BD = 8, AC = 10 болса, онда AD қабырғасының ұзындығын табыңыз.
A) $6\sqrt{2}$
B) 6
C) 12
D) $\sqrt{73}$
E) $\sqrt{13}$

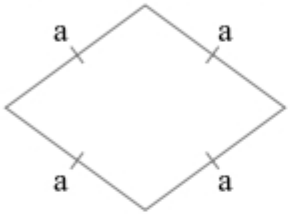
© «EduCon» басылымдары

РОМБ

Барлық қабырғалары тең болатын параллелограмм **ромб** деп аталады.

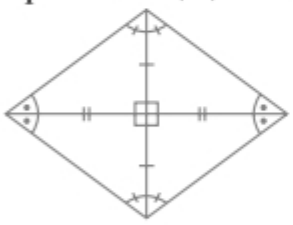
Ромбының қасиеттері мен белгілері

1. Барлық қабырғалары тең:

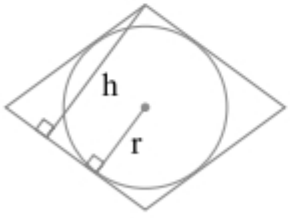


$$P = 4a$$

2. Диагональдар ішкі бұрыштардың биссектрисалары болып табылады, сонымен қатар өзара перпендикуляр және қиылысу нүктесімен қақ бөлінеді:



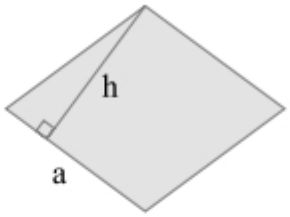
3. Іштей сызылған шеңбердің радиусы биіктіктің жартысына тең:



$$r = \frac{h}{2}$$

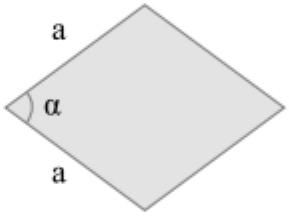
Ромбының ауданы

1. Қабырға және биіктік арқылы:



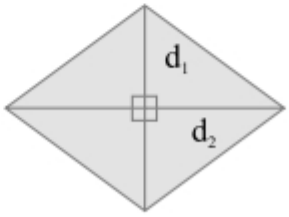
$$S = a \cdot h$$

2. Қабырға және бұрыш арқылы:



$$S = a^2 \cdot \sin\alpha$$

3. Диагональдары арқылы:



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

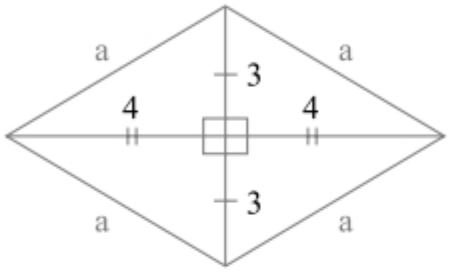
© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

Диагональдары 6 см және 8 см болатын ромбының периметрін табыңыз.

Шешімі:

Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр және қиылысу нүктесімен қақ бөлінеді:



Пифагор теоремасы бойынша:

$a^2 = 3^2 + 4^2$

$a^2 = 25$

$a = 5$

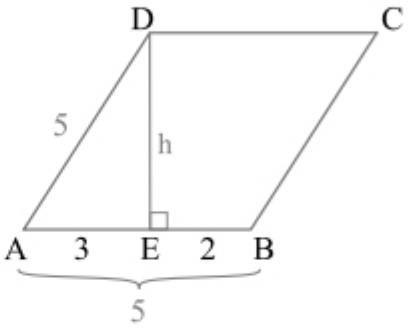
Демек, ромбының периметрі $P = 4a = 4 \cdot 5 = 20.$

Жауабы: 20 см.

Мысал 2

Ромбының доғал бұрышының төбесінен түсірілген биіктігі оның қабырғасын сүйір бұрыштың төбесінен санағанда 3 см және 2 см болатын кесінділерге бөледі. Ромбының ауданын табыңыз.

Шешімі:



Пифагор теоремасы бойынша:

$h^2 + 3^2 = 5^2$

$h^2 = 16$

$h = 4$

Ромбының ауданын оның қабырғасы мен биіктігі арқылы табамыз:

$S = a \cdot h = 5 \cdot 4 = 20.$

Жауабы: 20 см^2.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

Ромбының бір диагоналі екіншісінен 3 есе үлкен, ал ауданы 96 см². Ромбының диагональдарын табыңыз.

Шешімі:

Егер $d_1 = x$ болса, онда $d_2 = 3x$.

Ромбының ауданын оның диагональдары арқылы табамыз:

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$96 = \frac{x \cdot 3x}{2}$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8$$

Демек, $d_1 = x = 8$

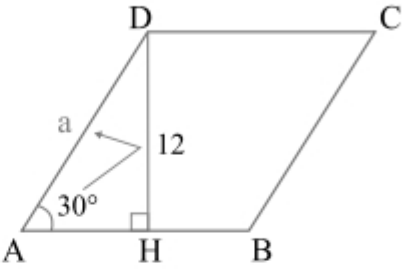
$d_2 = 3x = 3 \cdot 8 = 24$

Жауабы: 8 см; 24 см.

Мысал 4

Биіктігі 12 см, ал сүйір бұрышы 30° болатын ромбының ауданын табыңыз.

Шешімі:



$$\sin 30° = \frac{12}{a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{12}{a}$$

$$a = 24$$

Ромбының ауданын оның қабырғасы мен биіктігі арқылы табамыз:

$$S = a \cdot h = 24 \cdot 12 = 288.$$

Жауабы: 288 см².

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Диагональдары 10 см және 24 см болатын ромбының периметрін табыңыз.

2. Ромбының бір диагоналі екіншісінен 2 есе үлкен, ал ауданы 64 см^2. Ромбының диагональдарын табыңыз.

3. Биіктігі 18 см, ал сүйір бұрышы 30° болатын ромбының ауданын табыңыз.

4. Ромбының доғал бұрышының төбесінен түсірілген биіктігі оның қабырғасын сүйір бұрыштың төбесінен санағанда 5 см және 8 см болатын кесінділерге бөледі. Ромбының ауданын табыңыз.

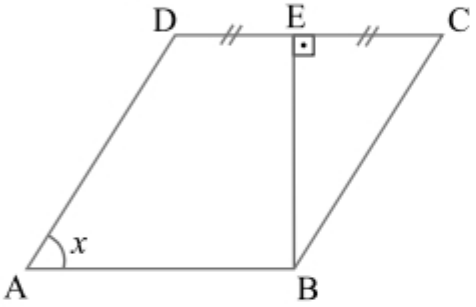
5. Қабырғасы 29 см, ал бір диагоналі 42 см болатын ромбының ауданын табыңыз.

6. Периметрі 112 см, ал сүйір бұрышы 45° болатын ромбының ауданын табыңыз.

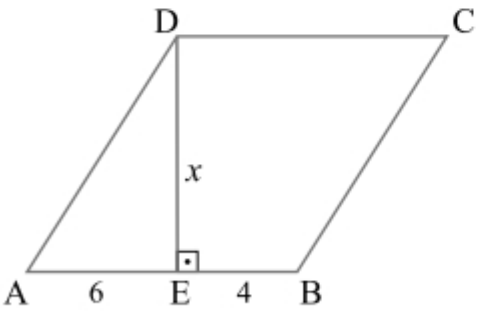
© «EduCon» басылымдары

7. Периметрі 128 см, ал бір бұрышының тангенсі $\frac{\sqrt{7}}{21}$ болатын ромбының ауданын табыңыз.

8. ABCD – ромб. x-тің мәнін табыңыз.

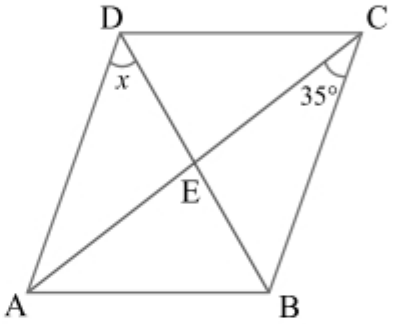


9. ABCD ромбының ауданын табыңыз.



10. ABCD ромбының диагональдары E нүктесінде қиылысады. Егер $EF \perp AB$ $(F \in AB)$, $EF = 6$ см және $FB = 2\sqrt{3}$ см болса, онда ромбының ауданын табыңыз.

11. ABCD – ромб. x-тің мәнін табыңыз.



12. Ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусы 3 см, ал доғал бұрышы 150°. Ромбының периметрін табыңыз.

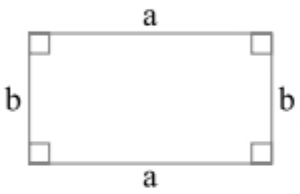
© «EduCon» басылымдары

ТІК ТӨРТБҰРЫШ

Барлық бұрыштары тік болатын параллелограмм, **тік төртбұрыш** деп аталады.

Тік төртбұрыштың қасиеттері мен белгілері

1. Қарама-қарсы жатқан қабырғалары тең және барлық бұрыштары тік:

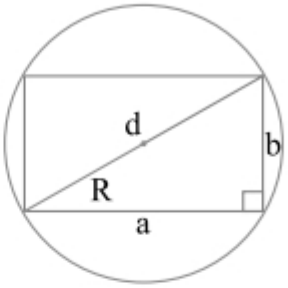


$$P = 2 \cdot (a + b)$$

2. Диагональдары тең және қиылысу нүктесімен қақ бөлінеді :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. Тік төртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы диагональдің жартысына тең:



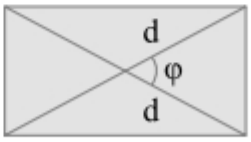
$$R = \frac{d}{2}$$

Тік төртбұрыштың ауданы

4. Қабырғалары арқылы:

$$S = a \cdot b$$

5. Диагональдар мен арасындағы бұрыш арқылы:



$$S = \frac{d^2 \cdot \sin\varphi}{2}$$

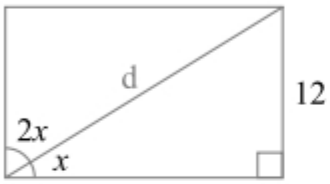
© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

Тік төртбұрыштың диагоналі оның бұрышын 1:2 қатынасындай етіп бөледі. Егер оның кіші қабырғасы 12 см болса, онда диагоналін табыңыз.

Шешімі:

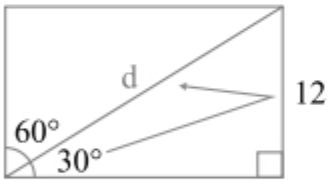
Тік төртбұрыштың барлық бұрыштары 90°-қа тең:



$x + 2x = 90°$

$3x = 90°$

$x = 30°$



$\sin 30° = \frac{12}{d}$

$\frac{1}{2} = \frac{12}{d}$

$d = 24$

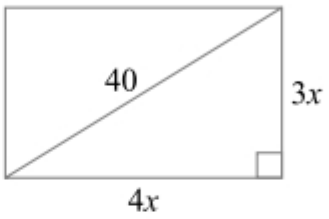
Жауабы: 24 см.

Мысал 2

Тік төртбұрыштың қабырғаларының қатынасы 3:4 қатынасындай, ал диагоналі 40 см. Тік төртбұрыштың периметрін табыңыз.

Шешімі:

Пифагор теоремасы бойынша:

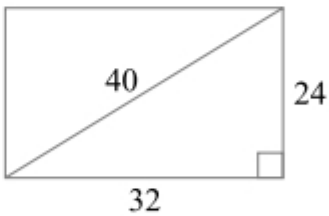


$9x^2 + 16x^2 = 1600$

$25x^2 = 1600$

$x^2 = 64$

$x = 8$



$P = 2 \cdot (a + b)$

$P = 2 \cdot (32 + 24)$

$P = 112$

Жауабы: 112 см.

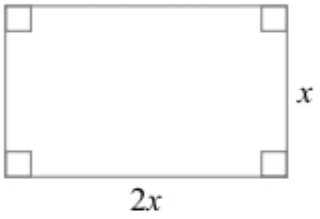
© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

Тік төртбұрыштың бір қабырғасы екіншісінен 2 есе үлкен, ал ауданы 32 см^2. Тік төртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыз.

Шешімі:

Тік төртбұрыштың ауданын оның қабырғалары арқылы табамыз:



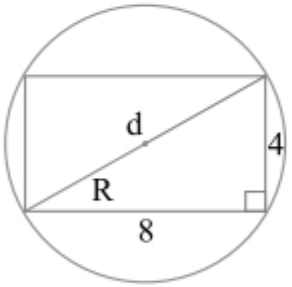
$S = a \cdot b$

$32 = 2x \cdot x$

$x^2 = 16$

$x = 4$

Тік төртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы диагональдің жартысына тең:



Пифагор теоремасы бойынша:

$d^2 = 4^2 + 8^2$

$d^2 = 80$

$d = 4\sqrt{5}$

Демек, $R = \frac{d}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$

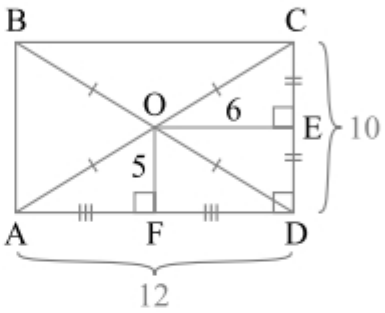
Жауабы: $2\sqrt{5}$ см.

Мысал 4

Тік төртбұрыштың диагональдарының қиылысу нүктесінен қабырғаларына дейінгі қашықтық 5 см және 6 см. Тік төртбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:

OE және OF кесінділері ACD тікбұрышты үшбұрышының орта сызықтары болып табылады.



Тік төртбұрыштың ауданын оның қабырғалары арқылы табамыз:

$S = a \cdot b = 12 \cdot 10 = 120$

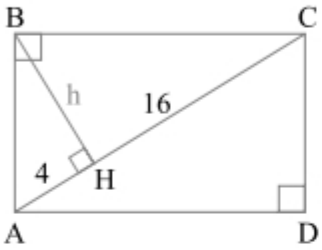
Жауабы: 120 см^2.

© «EduCon» басылымдары

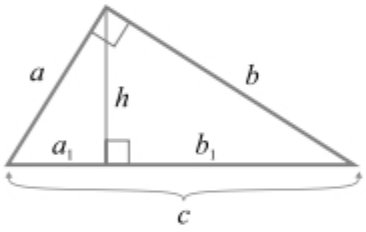
Мысал 5

Тік төртбұрыштың төбесінен диагоналіне түсірілген перпендикуляр оны 4 см және 16 см болатын кесінділерге бөледі. Тік төртбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі:



ABC тікбұрышты үшбұрышта BH кесіндісі гипотенузаға түсірілген биіктік. Демек, Евклид теоремасы бойынша:



$h^2 = a_1 \cdot b_1$

$h^2 = 4 \cdot 16$

$h^2 = 64$

$h = 8$

Тік төртбұрыштың диагоналі оны екі тең үшбұрышқа бөледі. Демек, $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20 = 80$$

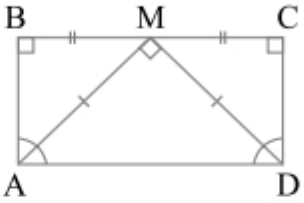
$S_{ABCD} = 2 \cdot 80 = 160$

Жауабы: 160 см^2.

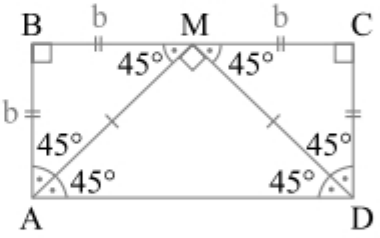
Мысал 6

ABCD тік төртбұрышында M нүктесі BC қабырғасының ортасы. MA және MD түзулері өзара перпендикуляр. Егер тік төртбұрыштың периметрі 30 см болса, онда оның қабырғаларын табыңыз.

Шешімі:



MBA және MCD тікбұрышты үшбұрыштар тең болғандықтан (екі катеті бойынша), MA мен MD гипотенузалары да тең болады.



Демек,
$\angle MAD = \angle MDA = 45°$.

Онда, AB = BM = MC.

$P = 2 \cdot (a + b) = 30$

$2 \cdot (2b + b) = 30$

$b = 5$, демек, $a = 2b = 10$.

Жауабы: 5 см; 10 см.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Тік төртбұрыштың қабырғаларының қатынасы 5:3 қатынасындай, ал периметрі 48 см. Тік төртбұрыштың қабырғаларын табыңыз.

2. Тік төртбұрыштың диагоналі 12 см, ал диагональ мен қабырғаның арасындағы бұрыш $60°$. Тік төртбұрыштың ауданын табыңыз.

3. Периметрі 26 см, ал ауданы 40 $см^2$ болатын тік төртбұрыштың қабырғаларын табыңыз.

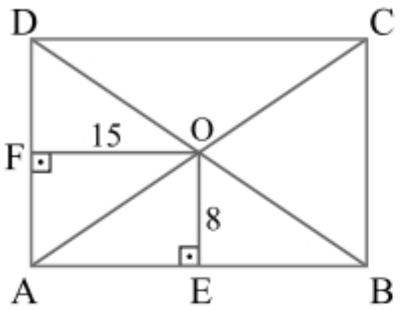
4. Қабырғалары 5 см және $5\sqrt{3}$ см болатын тік төртбұрыштың диагональдарының арасындағы бұрыштың кішісін табыңыз.

5. $ABCD$ тік төртбұрыштың қабырғалары 12 см және 16 см. Егер K, L, M және N нүктелері тік төртбұрыштың қабырғаларының орталары болса, онда $KLMN$ төртбұрышының ауданын табыңыз.

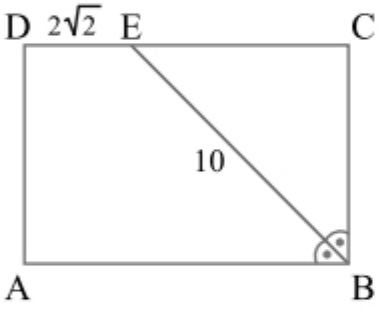
6. Тік төртбұрыштың төбесінен диагоналіне түсірілген перпендикуляр оны 2 см және 18 см болатын кесінділерге бөледі. Тік төртбұрыштың ауданын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

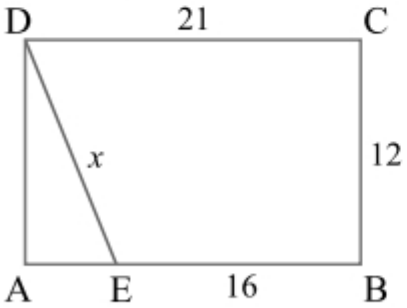
7. ABCD тік төртбұрышының периметрін табыңыз.



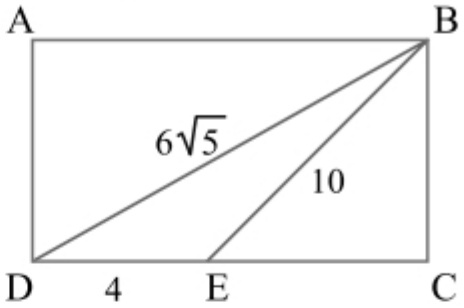
8. ABCD тік төртбұрышының ауданын табыңыз.



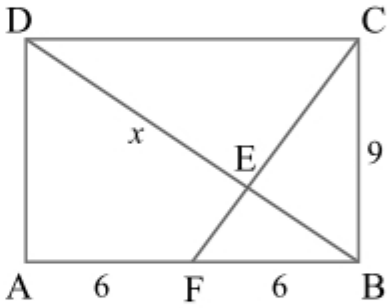
9. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.



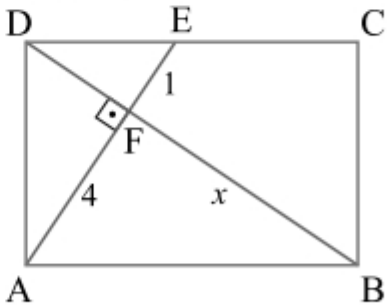
10. ABCD тік төртбұрышының ауданын табыңыз.



11. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.



12. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.



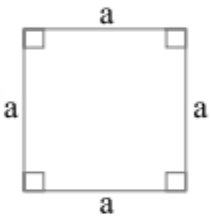
© «EduCon» басылымдары

ШАРШЫ

Барлық қабырғалары тең болатын тік төртбұрыш **шаршы** деп аталады.

Шаршының қасиеттері мен белгілері

1. Барлық қабырғалары тең және барлық бұрыштары тік:

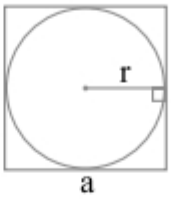


$$P = 4a$$

2. Диагональдар ішкі бұрыштардың биссектрисалары болып табылады, сонымен қатар өзара перпендикуляр және қиылысу нүктесімен қақ бөлінеді:

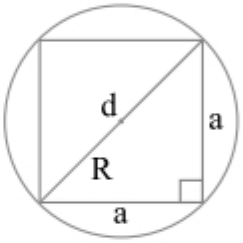
$$d = a\sqrt{2}$$

3. Шаршыға іштей сызылған шеңбердің радиусы қабырғасының жартысына тең:



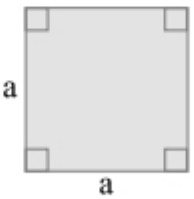
$$r = \frac{a}{2}$$

4. Шаршыға сырттай сызылған шеңбердің радиусы диагональдің жартысына тең:



$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}$$

Шаршының ауданы



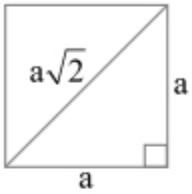
$$S = a^2$$

© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

Диагоналі 8 см болатын шаршының периметрін табыңыз.

Шешімі:



$a\sqrt{2}=8$

$a=\frac{8}{\sqrt{2}}$

$a=4\sqrt{2}$

Демек, $P=4a=4\cdot4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$.

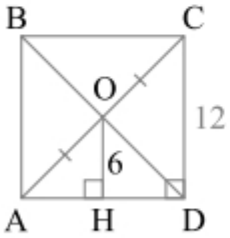
Жауабы: $16\sqrt{2}$ см.

Мысал 2

Шаршы диагональдарының қиылысу нүктесінен оның қабырғасына дейінгі қашықтық 6 см. Осы шаршының ауданын табыңыз.

Шешімі:

OH кесіндісі ACD үшбұрышының орта сызығы.
Демек, $CD=2\cdot OH$



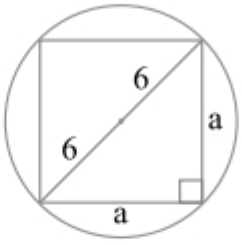
$S=a^2=12^2=144$

Жауабы: 144 см^2.

Мысал 3

Шаршыға сырттай сызылған шеңбердің радиусы 6 см. Шаршының ауданын табыңыз.

Шешімі:



$d=a\sqrt{2}=12$

$a=\frac{12}{\sqrt{2}}$

$a=6\sqrt{2}$

Демек, $S=a^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$.

Жауабы: 72 см^2.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Диагоналі $6\sqrt{2}$ см болатын шаршының ауданын табыңыз.

2. Шаршы диагональдарының қиылысу нүктесінен оның қабырғасына дейінгі қашықтық 12 см. Осы шаршының периметрін табыңыз.

3. Шаршыға іштей сызылған шеңбердің радиусы 4 см. Шаршының ауданын табыңыз.

4. Шаршыға сырттай сызылған шеңбердің радиусы 3 см. Шаршының ауданын табыңыз.

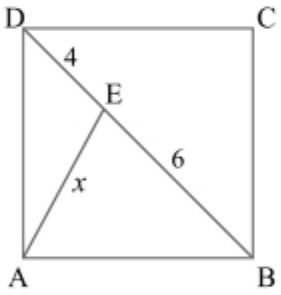
5. $ABCD$ шаршысының AB қабырғасынан E нүктесі алынды. Егер $AE = 7$ см және $CE = 13$ см болса, онда шаршының ауданын табыңыз.

6. Ауданы 25 см^2 болатын шаршының диагоналін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

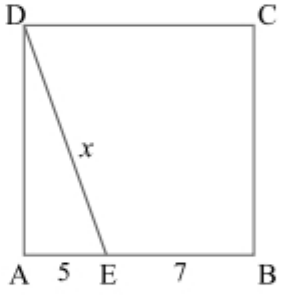
7. Ауданы 36 см² болатын шаршы берілген. Қабырғасы берілген шаршының қабырғасынан 3 см-ге артық болатын шаршының ауданын табыңыз.

8. ABCD – шаршы. x-тің мәнін табыңыз.



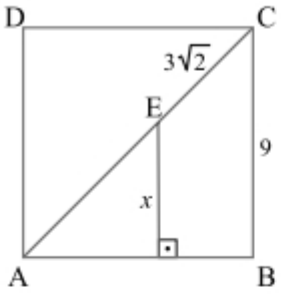
9. Шаршының екі төбесі шеңбердің бойында, ал қалған екі төбесі осы шеңберге жүргізілген жанаманың бойында жатыр. Егер шеңбердің радиусы 5 см болса, онда шаршының қабырғасын табыңыз.

10. ABCD – шаршы. x-тің мәнін табыңыз.

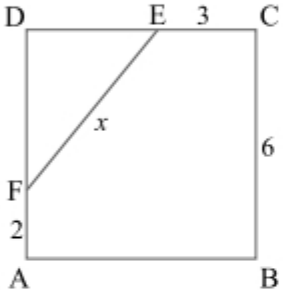


© «EduCon» басылымдары

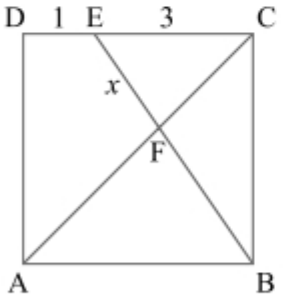
11. ABCD – шаршы. x-тің мәнін табыңыз.



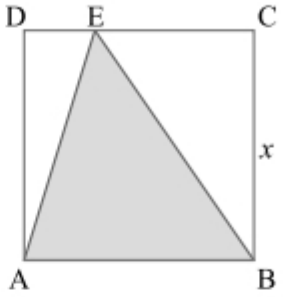
12. ABCD – шаршы. x-тің мәнін табыңыз.



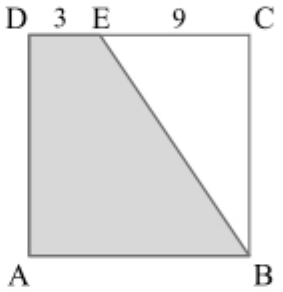
13. ABCD – шаршы. x-тің мәнін табыңыз.



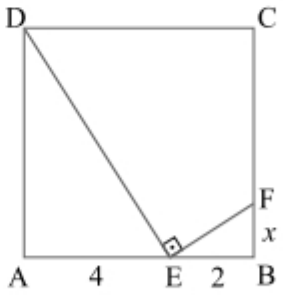
14. ABCD – шаршы. Егер боялған фигураның ауданы 32 см^2 болса, онда x-тің мәнін табыңыз.



15. ABCD – шаршы. Боялған фигураның ауданын табыңыз.



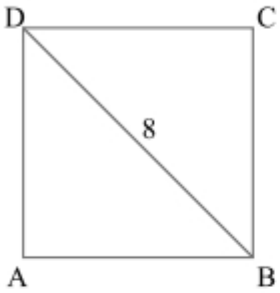
16. ABCD – шаршы. x-тің мәнін табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

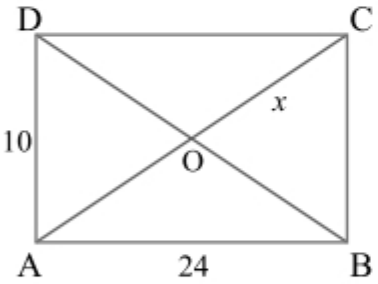
ТЕСТ №7

1. ABCD шаршысының ауданын табыңыз.



A) 16
B) 32
C) 48
D) 64
E) 24

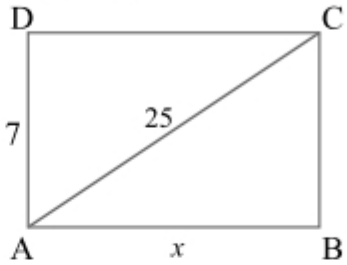
2. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.



A) 13
B) 12
C) 17
D) 15
E) 14

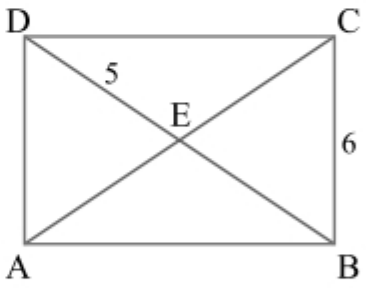
3. Диагональдары 30 см және 40 см болатын ромбының периметрін табыңыз.
A) 50 см
B) 25 см
C) 75 см
D) 100 см
E) 150 см

4. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.



A) 22
B) 18
C) 20
D) 15
E) 24

5. ABCD тік төртбұрышының ауданын табыңыз.

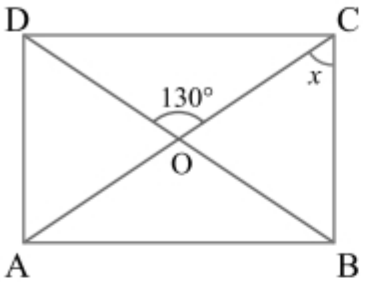


A) 24
B) 36
C) 48
D) 60
E) 72

6. Биіктігі 20 см, ал доғал бұрышы 150° болатын ромбының ауданын табыңыз.
A) 600 см^2
B) 400 см^2
C) 800 см^2
D) 200 см^2
E) 100 см^2

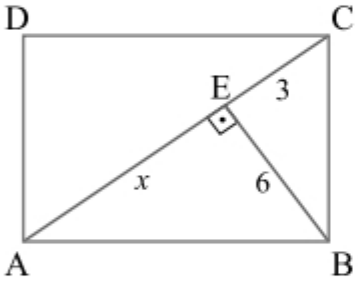
© «EduCon» басылымдары

7. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.



A) 60°
B) 65°
C) 55°
D) 45°
E) 40°

8. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.

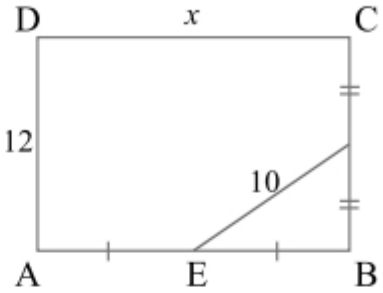


A) 16
B) 10
C) 12
D) 14
E) 8

9. Шаршының екі төбесі шеңбердің бойында, ал қалған екі төбесі осы шеңберге жүргізілген жанаманың бойында жатыр. Егер шеңбердің радиусы 5 см болса, онда шаршының ауданын табыңыз.

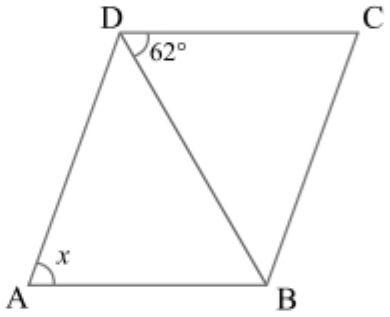
A) 25 см^2
B) 8 см^2
C) 36 см^2
D) 64 см^2
E) 49 см^2

10. ABCD – тік төртбұрыш. x-тің мәнін табыңыз.



A) 8
B) 14
C) 7
D) 16
E) 18

11. ABCD – ромб. x-тің мәнін табыңыз.



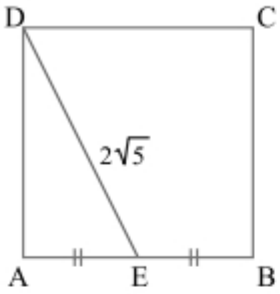
A) 28°
B) 46°
C) 68°
D) 56°
E) 36°

12. Ромбының доғал бұрышының төбесінен түсірілген биіктігі оның қабырғасын сүйір бұрыштың төбесінен санағанда 15 см және 10 см болатын кесінділерге бөледі. Ромбының ауданын табыңыз.

A) 400 см^2
B) 250 см^2
C) 300 см^2
D) 500 см^2
E) 200 см^2

© «EduCon» басылымдары

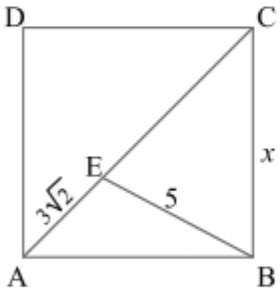
13. ABCD шаршысының периметрін табыңыз.



A) 4
B) 12
C) 16
D) 8
E) 20

14. Ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусы 4 см, ал бұрыштарының біреуі 30°. Ромбының периметрін табыңыз.
A) 32 см
B) 48 см
C) 24 см
D) 16 см
E) 64 см

15. ABCD шаршысы үшін дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.



A) $x=6$
B) $d=10$
C) $S=50$
D) $x=7$
E) $d=6\sqrt{2}$
F) $x=5\sqrt{2}$
G) $S=49$
H) $d=7\sqrt{2}$

16. Периметрі 104 см, ал диагональдарының қатынасы 5:12 қатынасындай болатын ромбының диагональдарын табыңыз.

A) 5 см
B) 10 см
C) 12 см
D) 18 см
E) 20 см
F) 24 см
G) 36 см
H) 48 см

17. Ауданы 49 см^2 болатын шаршы берілген. Қабырғасы берілген шаршының қабырғасынан 4 см-ге артық болатын шаршының периметрін табыңыз.
A) 121 см
B) 44 см
C) 12 см
D) 28 см
E) 55 см

18. Ауданы 24 см^2, ал диагональдарының біреуі екіншісінен 3 есе үлкен болатын ромбының диагональдарын табыңыз.
A) 2 см
B) 4 см
C) 6 см
D) 8 см
E) 12 см
F) 18 см
G) 21 см
H) 24 см

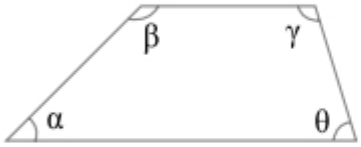
© «EduCon» басылымдары

ТРАПЕЦИЯ

Екі қабырғасы ғана параллель болатын төртбұрыш **трапеция** деп аталады.

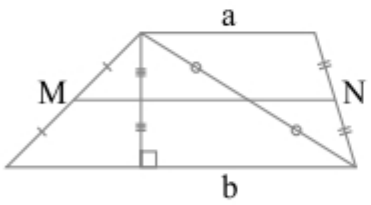
Трапецияның қасиеттері

1. Бүйір қабырғаларына іргелес екі бұрыштың қосындысы 180°-қа тең:



$$\alpha+\beta=180^\circ$$
$$\gamma+\theta=180^\circ$$

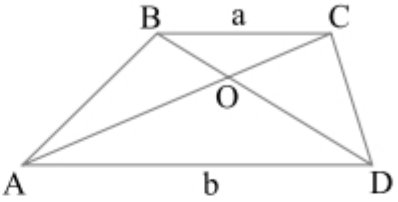
2. Трапецияның орта сызығы оның табандарына параллель және табандарын қосатын кез келген кесіндіні қақ бөледі:



$$MN=\frac{a+b}{2}$$

MN – орта сызық

3. Трапецияның табандары мен диагональдарының кесінділері арқылы пайда болған үшбұрыштар ұқсас болып келеді:

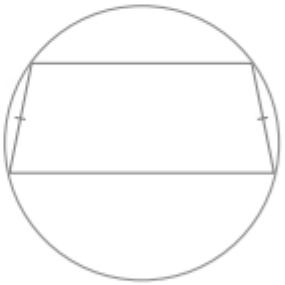


$COB \sim AOD$

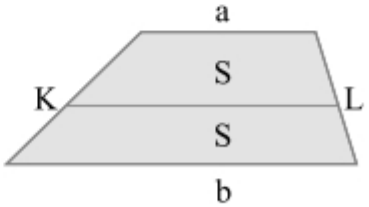
$$k=\frac{a}{b}$$

k – ұқсастық коэффициенті

4. Шеңберге тек қана теңбүйірлі трапецияны сызуға болады:



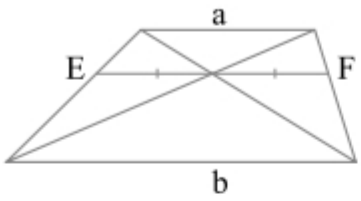
5. Трапецияның табандарына параллель болатын және оны екі теңшамалы трапецияға бөлетін кесіндінің ұзындығы:



$$KL^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

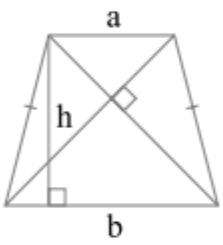
© «EduCon» басылымдары

6. Трапецияның табандарына параллель болатын және диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетін кесіндінің ұзындығы:



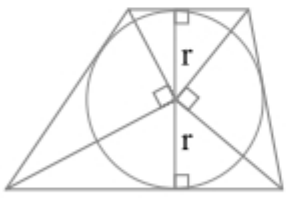
$$EF = \frac{2ab}{a+b}$$

7. Егер теңбүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр болса, онда оның биіктігі орта сызығына тең болады:



$$h = \frac{a+b}{2}$$

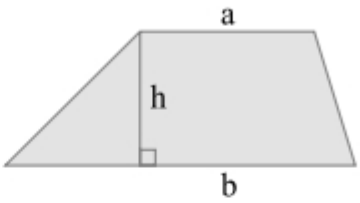
8. Шеңберге сырттай сызылған трапеция:



$$h = 2r$$

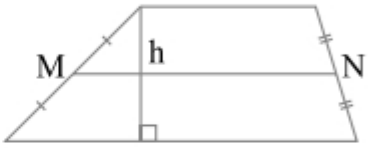
Трапецияның ауданы

1. Табандары мен биіктігі арқылы:



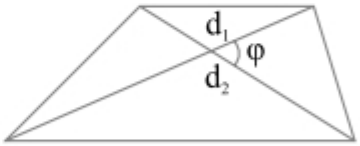
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

2. Орта сызық пен биіктігі арқылы:



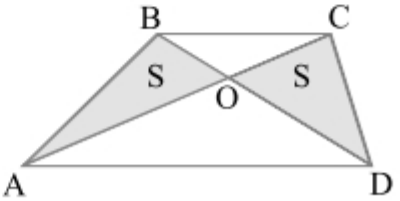
$$S = MN \cdot h$$

3. Диагональдар мен арасындағы бұрыш арқылы:



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi}{2}$$

4. Трапецияның бүйір қабырғалары мен диагональдарының кесінділері арқылы пайда болған үшбұрыштар теңшамалы болып келеді:

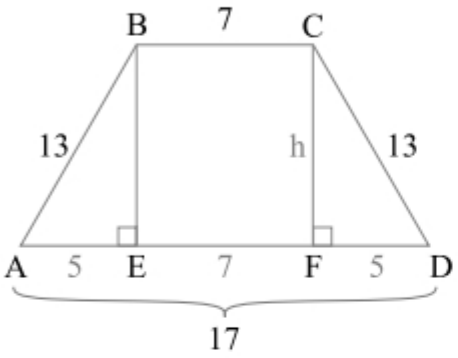


© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы 13 см, ал табандары 7 см және 17 см. Трапецияның ауданын табыңыз.

Шешімі:



Пифагор теоремасы бойынша:

$h^2 + 5^2 = 13^2$

$h^2 = 144$

$h = 12$

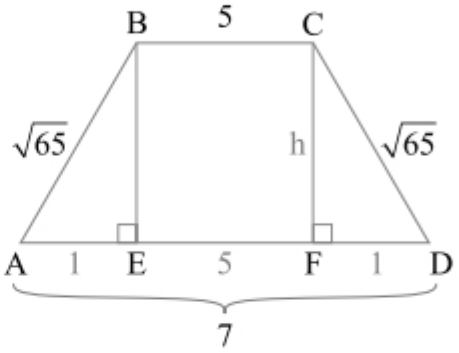
Демек, $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{7+17}{2} \cdot 12 = 144$

Жауабы: 144 см^2.

Мысал 2

Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы $\sqrt{65}$ см, ал табандары 5 см және 7 см. Трапецияның диагоналін табыңыз.

Шешімі:

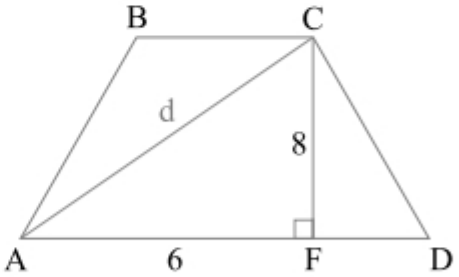


Пифагор теоремасы бойынша:

$h^2 + 1^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2$

$h^2 = 64$

$h = 8$



Пифагор теоремасы бойынша:

$6^2 + 8^2 = d^2$

$d^2 = 100$

$d = 10$

Жауабы: 10 см

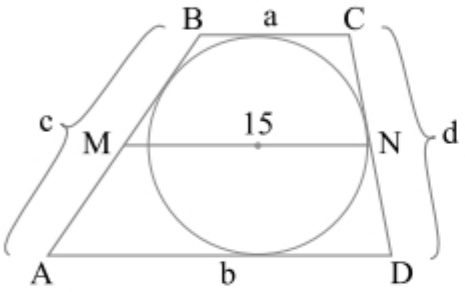
© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

Шеңберге сырттай сызылған трапецияның орта сызығы 15 см. Трапецияның периметрін табыңыз.

Шешімі:

Трапецияның орта сызығын табу формуласы бойынша:



$$\frac{a+b}{2}=MN$$

$$\frac{a+b}{2}=15$$

$$a+b=30$$

Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылса, онда оның қарсы жатқан қабырғаларының қосындысы тең болады:

$$a+b=c+d=30$$

Демек, $P=a+b+c+d=30+30=60$

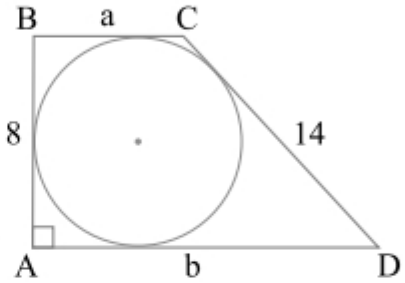
Жауабы: 60 см.

Мысал 4

Шеңберге сырттай сызылған тікбұрышты трапецияның бүйір қабырғалары 8 см және 14 см. Трапецияның ауданын табыңыз.

Шешімі:

Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылса, онда оның қарсы жатқан қабырғаларының қосындысы тең болады:



$$a+b=c+d$$

$$a+b=8+14$$

$$a+b=22$$

Трапецияның ауданын оның табандары мен биіктігі арқылы табамыз:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{22}{2}\cdot 8=88$$

Жауабы: 88 см^2.

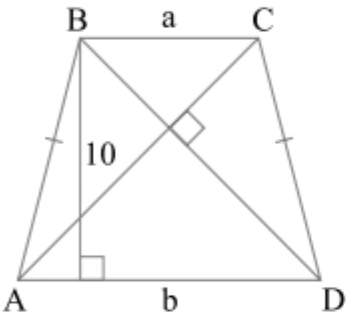
© «EduCon» басылымдары

Мысал 5

Теңбүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр. Егер трапецияның биіктігі 10 см болса, онда оның ауданын табыңыз.

Шешімі:

Егер теңбүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр болса, онда оның биіктігі орта сызығына тең болады:



$$\frac{a+b}{2}=h$$

$$\frac{a+b}{2}=10$$

$$a+b=20$$

Трапецияның ауданын оның табандары мен биіктігі арқылы табамыз:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{20}{2}\cdot 10=100$$

Жауабы: 100 см^2.

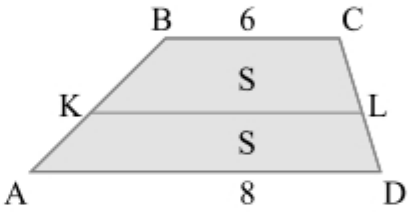
Мысал 6

Трапецияның табандары 6 см және 8 см. Трапецияның табандарына параллель болатын және оны екі теңшамалы трапецияға бөлетін кесіндінің ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

Трапецияның табандарына параллель болатын және оны екі теңшамалы трапецияға бөлетін кесіндінің ұзындығы:

$$KL^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$



$$KL^2=\frac{6^2+8^2}{2}$$

$$KL^2=50$$

$$KL=5\sqrt{2}$$

Жауабы: $5\sqrt{2}$ см.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Трапецияның диагоналі оның орта сызығын 4 см және 3 см болатын кесінділерге бөледі. Трапецияның кіші табанын табыңыз.

2. Шеңберге сырттай сызылған трапецияның орта сызығы 20 см. Трапецияның периметрін табыңыз.

3. Трапецияға іштей сызылған шеңбердің радиусы 2 см, ал трапецияның бүйір қабырғалары 5 см және 6 см. Трапецияның ауданын табыңыз.

4. Тікбұрышты трапецияның үлкен табаны 12 см, бүйір қабырғасы $8\sqrt{2}$ см, ал араларындағы бұрыш 45°. Трапецияның ауданын табыңыз.

5. Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы 10 см, ал табандары 12 см және 24 см. Трапецияның ауданын табыңыз.

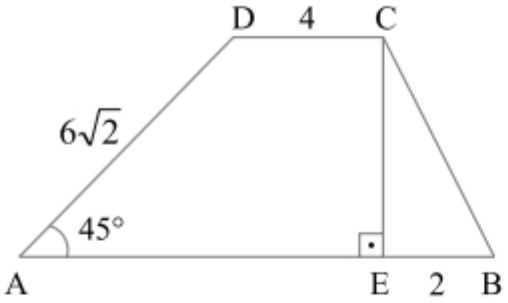
6. Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы 13 см, ал табандары 6 см және 16 см. Трапецияның ауданын табыңыз.

7. Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы $5\sqrt{2}$ см, ал табандары 7 см және 17 см. Трапецияның диагоналін табыңыз.

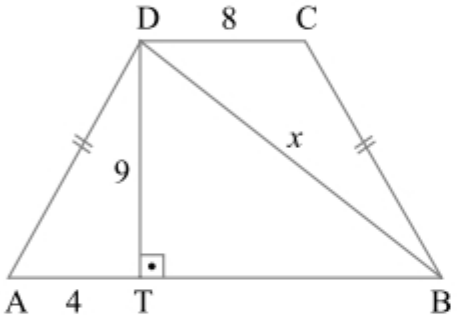
8. Трапецияның табандары 10 см және 15 см. Трапецияның табандарына параллель болатын және диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетін кесіндінің ұзындығын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

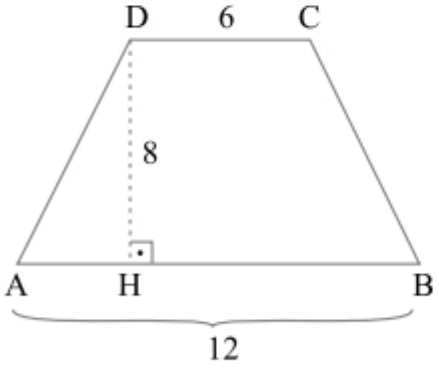
9. ABCD трапециясының ауданын табыңыз.



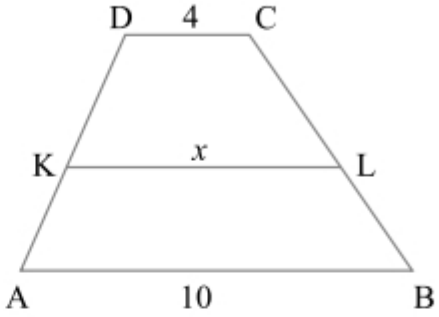
10. ABCD – трапеция. x-тің мәнін табыңыз.



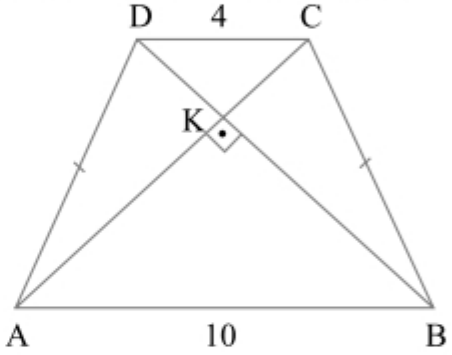
11. ABCD трапециясының ауданын табыңыз.



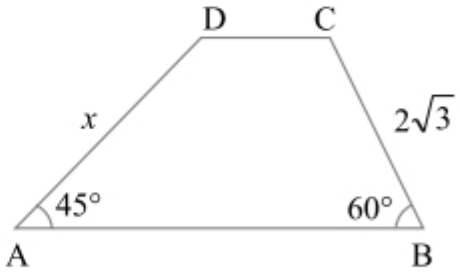
12. ABCD – трапеция. $S_{KDCL} = S_{AKLB}$, $KL \parallel AB$. x-тің мәнін табыңыз.



13. ABCD трапециясының ауданын табыңыз.



14. ABCD – трапеция. x-тің мәнін табыңыз.

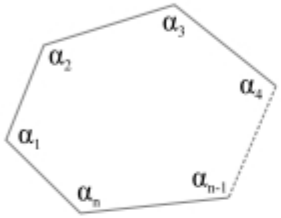


© «EduCon» басылымдары

КӨПБҰРЫШТАР

Кездейсоқ көпбұрыш

1. Көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы:

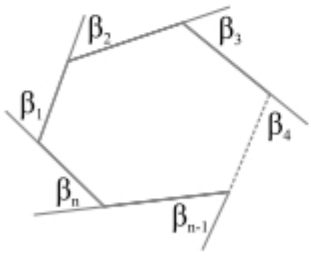


$$S_{\alpha} = 180^{\circ} \cdot (n-2)$$

Дұрыс көпбұрыштың ішкі бұрыштары тең және келесі формуламен табылады:

$$\alpha = \frac{180^{\circ} \cdot (n-2)}{n}$$

2. Көпбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысы:



$$S_{\beta} = 360^{\circ}$$

Сыртқы бұрыштарының қосындысы n-ге тәуелді емес.

Дұрыс көпбұрыштың сыртқы бұрыштары тең және келесі формуламен табылады:

$$\beta = \frac{360^{\circ}}{n}$$

3. Көпбұрыштың диагональдар саны:

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Көпбұрыштың бір төбесінен шығатын диагональдар саны:

$$d_n = n - 3$$

4. Көпбұрыштың бір төбесінен шығатын диагональдар арқылы пайда болған үшбұрыштардың саны:

$$N_{\Delta} = n - 2$$

© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

Егер көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 720° болса, онда көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.

Шешімі:

Көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы келесі формуламен табылады:

$$S_{\alpha} = 180° \cdot (n-2)$$
$$720° = 180° \cdot (n-2)$$
$$4 = n-2$$
$$n = 6$$

Жауабы: 6.

Мысал 2

Дұрыс онбұрыштың сыртқы бұрышын табыңыз.

Шешімі:

Дұрыс көпбұрыштың сыртқы бұрыштары тең және келесі формуламен табылады:

$$\beta = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{10} = 36°$$

Жауабы: 36°.

Мысал 3

Сыртқы бұрышы 18° болатын дұрыс көпбұрыштың диагональдар санын табыңыз.

Шешімі:

Дұрыс көпбұрыштың сыртқы бұрыштары тең және келесі формуламен табылады:

$$\beta = \frac{360°}{n}$$
$$18° = \frac{360°}{n}$$
$$n = 20$$

Демек, диагональдар саны $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

$$D_{20} = \frac{20 \cdot (20-3)}{2} = 170$$

Жауабы: 170.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Бұрыштарының қосындысы 900° болатын көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.

2. Дұрыс көпбұрыштың сыртқы бұрышы оның ішкі бұрышынан 144°-қа кем. Көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.

3. Дұрыс көпбұрыштың сыртқы бұрышы оның ішкі бұрышынан 150°-қа кем. Егер көпбұрыштың қабырғасы 4 см болса, онда оның периметрін табыңыз.

4. Дұрыс көпбұрыштың сыртқы бұрышы оның ішкі бұрышынан 4 есе кем. Егер көпбұрыштың қабырғасы 8 см болса, онда оның периметрін табыңыз.

5. Дұрыс алтыбұрыштың сыртқы бұрышын табыңыз.

6. Сыртқы бұрышы 30°, ал оған сырттай сызылған шеңбердің диаметрі 10 см болатын дұрыс көпбұрыштың ауданын табыңыз.

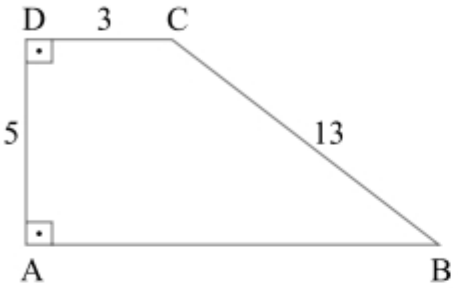
7. Дұрыс көпбұрыштың ішкі бұрышы оның сыртқы бұрышынан 3 есе артық. Егер көпбұрыштың периметрі 48 см болса, онда оның қабырғасын табыңыз.

8. Сыртқы бұрышы 36° болатын дұрыс көпбұрыштың диагональдар санын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

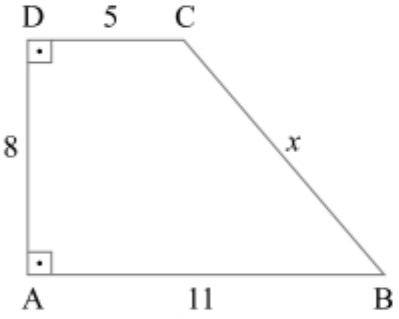
ТЕСТ №8

1. ABCD трапециясының ауданын табыңыз.



A) 45
B) 65
C) 30
D) 60
E) 55

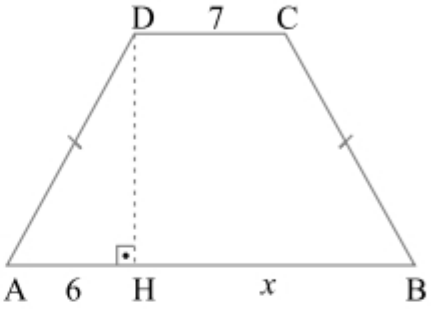
2. ABCD – трапеция. x-тің мәнін табыңыз.



A) 16
B) 15
C) 13
D) 12
E) 10

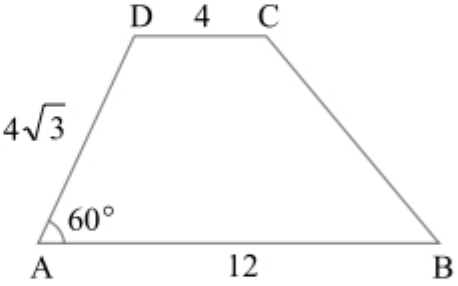
3. Сыртқы бұрышы 15° болатын дұрыс көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.
A) 18
B) 20
C) 24
D) 26
E) 16

4. ABCD – трапеция. x-тің мәнін табыңыз.



A) 6
B) 12
C) 14
D) 13
E) 8

5. ABCD трапециясының ауданын табыңыз.

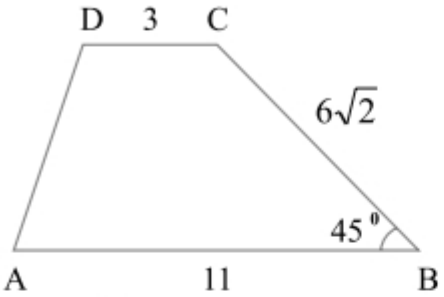


A) 36
B) 48
C) 72
D) 28
E) 42

6. Ішкі бұрышы 150° болатын дұрыс көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.
A) 12
B) 10
C) 8
D) 14
E) 16

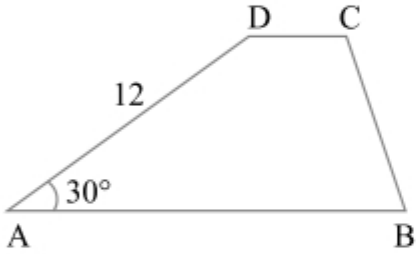
© «EduCon» басылымдары

7. ABCD трапециясының AD қабырғасын табыңыз.



A) $3\sqrt{10}$
B) $4\sqrt{5}$
C) $2\sqrt{10}$
D) $3\sqrt{3}$
E) $5\sqrt{3}$

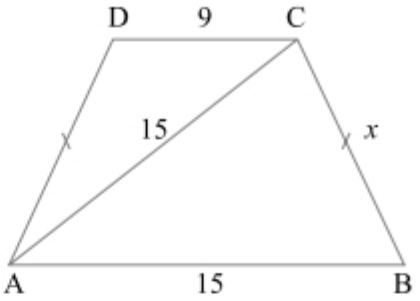
8. ABCD трапециясының биіктігін табыңыз.



A) 8
B) 6
C) 4
D) 9
E) 10

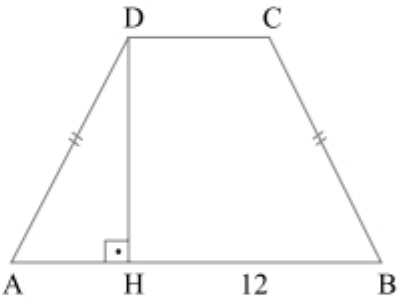
9. Табандары 19 см және 5 см, ал бүйір қабырғалары 15 см және 13 см болатын трапецияның ауданын табыңыз.
A) 108 см^2
B) 112 см^2
C) 144 см^2
D) 136 см^2
E) 122 см^2

10. ABCD – трапеция. x-тің мәнін табыңыз.



A) $4\sqrt{10}$
B) $3\sqrt{10}$
C) $4\sqrt{5}$
D) $6\sqrt{3}$
E) $5\sqrt{2}$

11. Ауданы 120 см^2 болатын ABCD трапециясының биіктігін табыңыз.

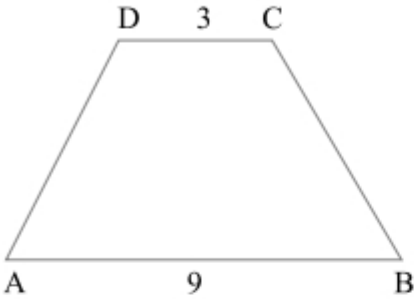


A) 8 см
B) 10 см
C) 12 см
D) 6 см
E) 14 см

12. Сыртқы бұрышы 45°, ал оған сырттай сызылған шеңбердің диаметрі 8 см болатын дұрыс көпбұрыштың ауданын табыңыз.
A) $16\sqrt{2}$ см^2
B) $18\sqrt{3}$ см^2
C) $32\sqrt{2}$ см^2
D) $30\sqrt{5}$ см^2
E) $10\sqrt{2}$ см^2

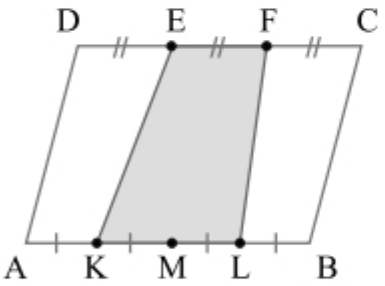
© «EduCon» басылымдары

13. ABCD трапециясының орта сызығы оның диагоналімен қандай кесінділерге бөлінетінін табыңыз.



A) 0,5
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 3,5
F) 4
G) 4,5
H) 5,5

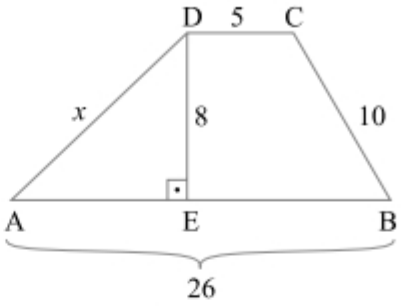
14. ABCD параллелограмының ауданы 120 см^2 . Боялған фигураның ауданын табыңыз.



A) 50 см^2
B) 60 см^2
C) 48 см^2
D) 72 см^2
E) 40 см^2

15. Шеңберге сырттай сызылған тікбұрышты трапецияның бүйір қабырғалары 10 см және 16 см. Осы трапецияның ауданын табыңыз.
A) 130 см^2
B) 150 см^2
C) 148 см^2
D) 136 см^2
E) 114 см^2

16. ABCD трапециясы үшін дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.



A) $AD = 15$
B) $AE = 6$
C) $P_{ABCD} = 58$
D) $S_{ABCD} = 93$
E) $AD = 17$
F) $AE = 8$
G) $P_{ABCD} = 62$
H) $S_{ABCD} = 124$

17. Ішкі бұрышы 108° болатын дұрыс көпбұрыш үшін дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.
A) Қабырғалар саны – 5
B) Диагональдар саны – 10
C) Әр төбесінен 3 диагональ жүргізуге болады
D) Сыртқы бұрышы – 72°
E) Қабырғалар саны – 6
F) Әр төбесінен 4 диагональ жүргізуге болады
G) Сыртқы бұрышы – 54°
H) Диагональдар саны – 5

18. Барлық диагональдар саны 35 болатын көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.
A) 8
B) 12
C) 10
D) 9
E) 6

© «EduCon» басылымдары

ШЕҢБЕР

Шеңбердегі түзулер мен кесінділер

Берілген нүктеден бірдей қашықтықта жатқан нүктелерден тұратын фигураны **шеңбер** деп атайды.

Жазықтықтың шеңбермен шектелген бөлігін **дөңгелек** деп атайды.

Шеңбердің кез келген нүктесін оның центрімен қосатын кесіндіні **радиус** деп атайды.

Шеңбердің екі нүктесін қосатын кесіндіні **хорда** деп атайды.

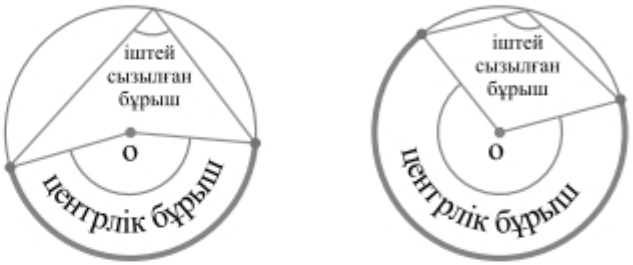
Шеңбердің центрі арқылы өтетін хорданы **диаметр** деп атайды.

Шеңбермен бір ғана ортақ нүктесі болатын және осы нүктеге жүргізілген радиусқа перпендикуляр түзуді **жанама** деп атайды.

Шеңбермен екі ортақ нүктесі болатын түзуді **қиюшы** деп атайды.

Шеңбердегі бұрыштар

Іштей сызылған бұрыш – төбесі шеңбердің бойында жататын екі хорданың арасындағы бұрыш.

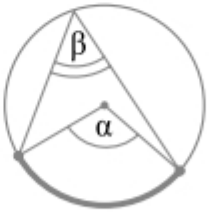


Центрлік бұрыш – екі радиустың арасындағы бұрыш.

Доғаның градустық өлшемі оны керіп тұрған центрлік бұрыштың градустық өлшеміне тең.

Іштей сызылған бұрыштардың қасиеттері

1. Бір доғаны керетін іштей сызылған бұрыш центрлік бұрыштың жартысына тең болады:



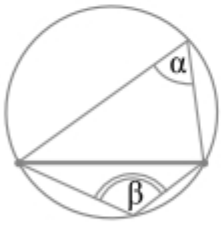
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

© «EduCon» басылымдары

2. Бір доғаны керетін барлық іштей сызылған бұрыштар тең болады:

3. Бір хорданы керетін және төбелері хорданың бір жағында орналасатын барлық іштей сызылған бұрыштар тең болады:

4. Бір хорданы керетін және төбелері хорданың екі жағында орналасатын кез келген екі іштей сызылған бұрыштың қосындысы 180° болады:

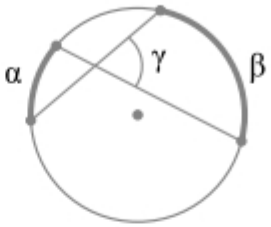


$$\alpha+\beta=180^\circ$$

5. Диаметрді керетін барлық іштей сызылған бұрыштар тік болады:

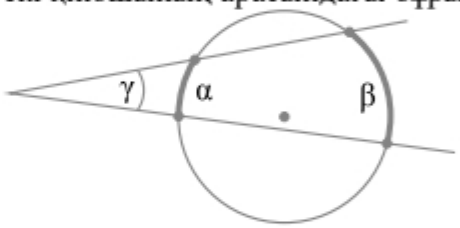
Хордалар, жанама мен қиюшылар арасындағы бұрыш

1. Қиылысатын екі хорданың арасындағы бұрыш:



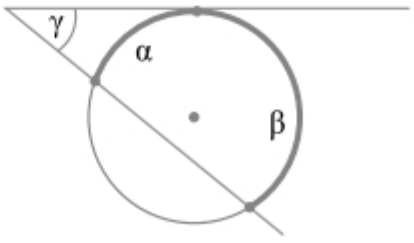
$$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

2. Шеңберден тыс жатқан нүктеде қиылысатын екі қиюшының арасындағы бұрыш:



$$\gamma=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

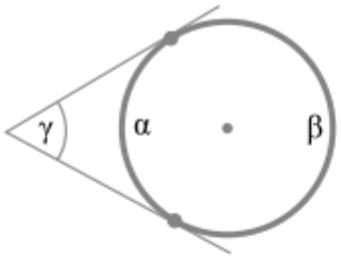
3. Бір нүктеден жүргізілген жанама мен қиюшының арасындағы бұрыш:



$$\gamma=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

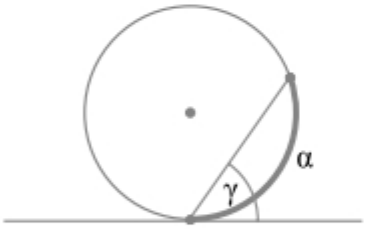
© «EduCon» басылымдары

4. Бір нүктеден жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрыш:



$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2} = \pi - \alpha$$

5. Жанама мен хорданың арасындағы бұрыш:

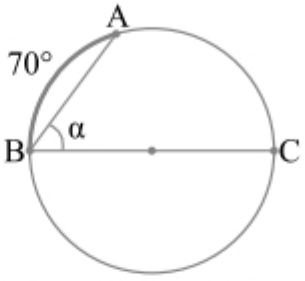


$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

Мысал 1

70°-тық доғаны керіп тұрған AB хордасы мен BC диаметрінің арасындағы бұрышты табыңыз.

Шешімі:



$$\cup AC = \cup BAC - \cup BA$$

$$\cup AC = 180° - 70°$$

$$\cup AC = 110°$$

Іштей сызылған бұрыштың градустық өлшемі оның керіп тұрған доғасының градустық өлшемінің жартысына тең:

$$\alpha = \frac{\cup AC}{2} = \frac{110°}{2} = 55°$$

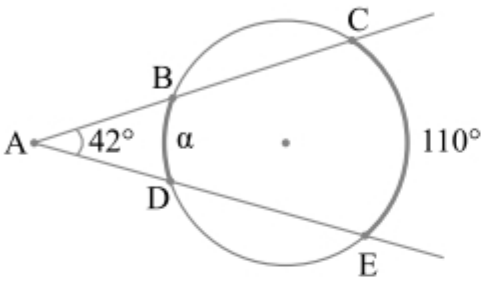
Жауабы: 55°.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 2

Шеңберден тыс жатқан бір нүктеден жүргізілген екі қиюшының арасындағы бұрыш 42°. Егер осы бұрыштың қабырғаларымен шектелген үлкен доғаның градустық өлшемі 110° болса, онда кіші доғаның градустық өлшемін табыңыз.

Шешімі:



$$\angle CAE = \frac{\cup EC - \cup DB}{2}$$

$$42° = \frac{110° - \alpha}{2}$$

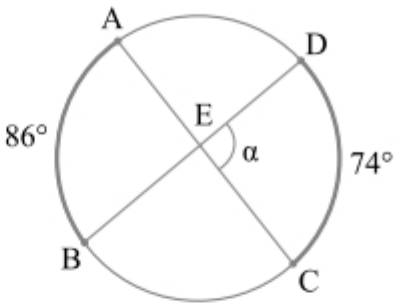
$$84° = 110° - \alpha$$

$$\alpha = 26°$$

Жауабы: 26°.

Мысал 3

α-ның мәнін табыңыз.



Шешімі:

$$\angle DEC = \frac{\cup AB + \cup DC}{2}$$

$$\alpha = \frac{86° + 74°}{2}$$

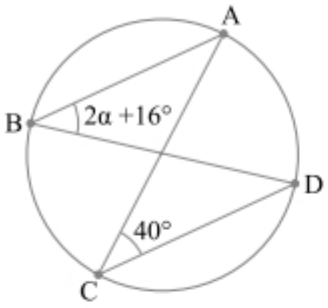
$$\alpha = 80°$$

Жауабы: 80°.

© «EduCon» басылымдары

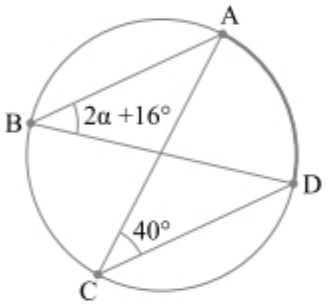
Мысал 4

α-ның мәнін табыңыз.



Шешімі:

Бір доғаны кететін барлық іштей сызылған бұрыштар тең болады:



$\angle ABD = \angle ACD$

$2\alpha + 16° = 40°$

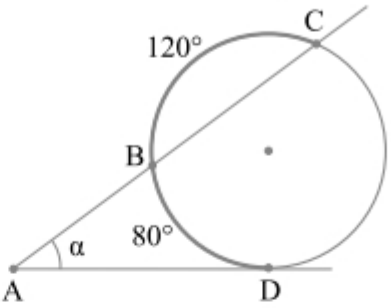
$2\alpha = 24°$

$\alpha = 12°$

Жауабы: $12°$.

Мысал 5

AD – жанама. α-ның мәнін табыңыз.



Шешімі:

$120° + 80° + \cup DC = 360°$

$\cup DC = 160°$

Онда, $\angle CAD = \dfrac{\cup DC - \cup BD}{2}$

$\alpha = \dfrac{160° - 80°}{2}$

$\alpha = 40°$

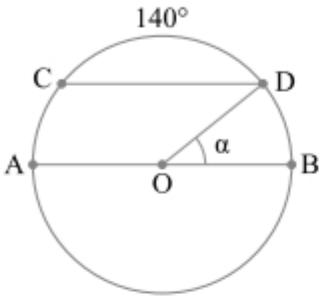
Жауабы: $40°$.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 6

$AB \parallel CD$. O – шеңбердің центрі.

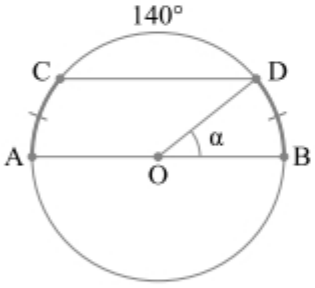
α-ның мәнін табыңыз.



Шешімі:

Параллель хордалардың арасындағы доғалар тең болады:

$\cup AC = \cup DB$



$\cup AC + 140° + \cup DB = 180°$

$\cup DB + 140° + \cup DB = 180°$

$2 \cdot \cup DB = 40°$

$\cup DB = 20°$

Центрлік бұрыштың градустық өлшемі оның керіп тұрған доғасының градустық өлшеміне тең болады:

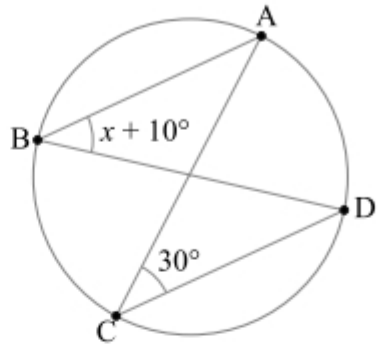
$\alpha = \cup DB = 20°$

Жауабы: $20°$.

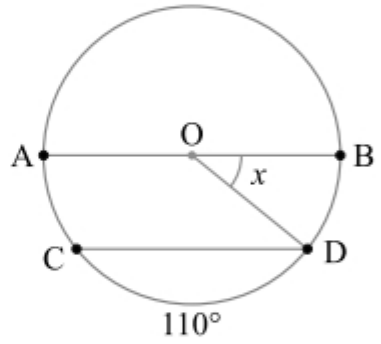
© «EduCon» басылымдары

Есептер

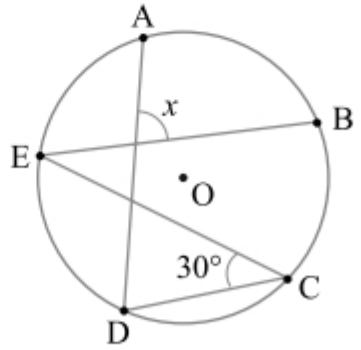
6. x-тің мәнін табыңыз.



7. $AB \parallel CD$. x-тің мәнін табыңыз.

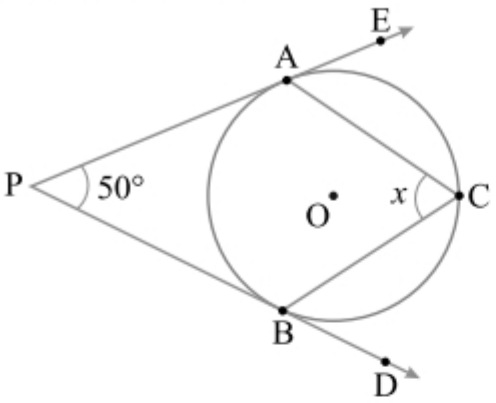


8. Егер $\cup AB = 80°$ болса, онда x-тің мәнін табыңыз.

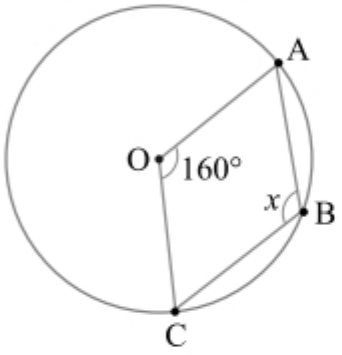


EduCon басылымдары

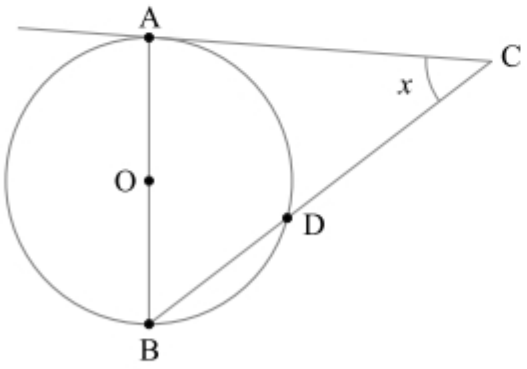
9. A және B нүктелері – жанасу нүктелері. x-тің мәнін табыңыз.



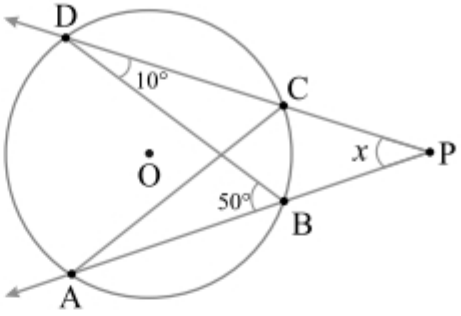
10. x-тің мәнін табыңыз.



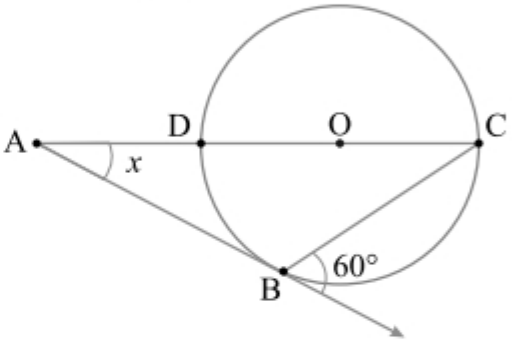
11. A – жанасу нүктесі. Егер $\cup BD = 50^\circ$ болса, онда x-тің мәнін табыңыз.



12. x-тің мәнін табыңыз.



13. B – жанасу нүктесі. x-тің мәнін табыңыз.



14. Хорда шеңберді 5:7 қатынасындай болатын екі доғаға бөледі. Осы доғалардың кішісін керетін іштей сызылған бұрышты табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

15. AB және BC хордаларының арасындағы бұрыш 30°. Егер $\cup AB = 2 \cdot \cup BC$ болса, онда AB доғасының градустық өлшемін табыңыз.

16. AB хордасы шеңберді екі доғаға бөледі. Бірінші доғаның градустық өлшемі 60°, ал екінші доға AC хордасымен қақ бөлінеді. BAC бұрышын табыңыз.

17. Шеңбер үш нүктемен 2:5:11 қатынасындай болатын үш доғаға бөлінді. Нүктелер өзара хордалармен жалғанып, үшбұрыш құрастырылды. Пайда болған үшбұрыштың үлкен бұрышын табыңыз.

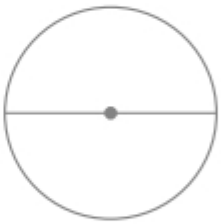
© «EduCon» басылымдары

Хордалардың қасиеттері

1. Егер хордалар тең болса, онда олар шеңбердің центрінен бірдей қашықтықта орналасқан және керісінше:

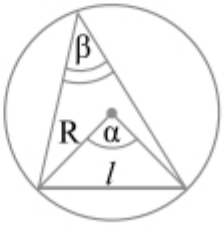
2. Екі хорданың үлкені шеңбердің центріне жақын орналасқан:

3. Ең үлкен хорда диаметр болып келеді:



4. Егер диаметр хорданы қақ бөлсе, онда ол оған перпендикуляр болады және керісінше:

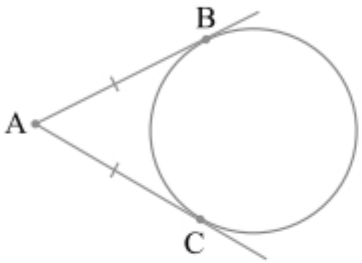
5. Хорданың ұзындығы:



$$l = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\beta$$

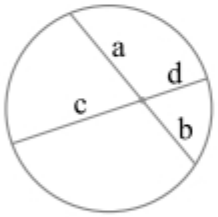
Хорданың, жанама мен қиюшылардың кесінділері арасындағы байланыс

6. Бір нүктеден жүргізілген жанамалардың кесінділері тең болады:



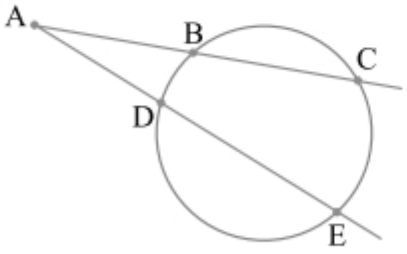
$$AB = AC$$

7. Қиылысатын екі хорданың кесінділерінің көбейтіндісі тең болады:



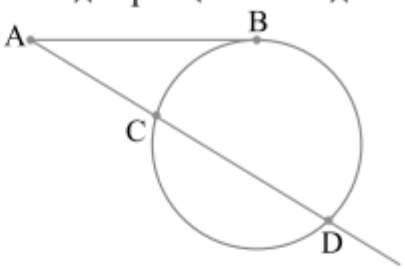
$$a \cdot b = c \cdot d$$

8. Бір нүктеден жүргізілген екі қиюшының кесінділерінің көбейтіндісі тең болады:



$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

9. Бір нүктеден жүргізілген жанаманың кесіндісінің квадраты қиюшының кесінділерінің көбейтіндісіне тең болады:



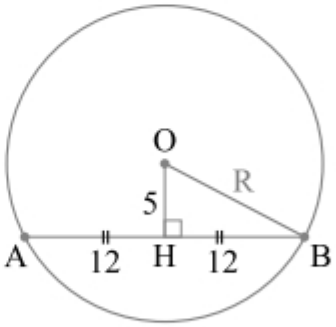
$$AB^2 = AC \cdot AD$$

Мысал 7

Шеңбердің центрінен 5 см қашықтықта орналасқан хорданың ұзындығы 24 см. Шеңбердің радиусын табыңыз.

Шешімі:

Хордаға шеңбердің центрінен жүргізілген перпендикуляр оны қақ бөледі:



Пифагор теоремасы бойынша:

$R^2 = 5^2 + 12^2$

$R^2 = 169$

$R = 13$

Жауабы: 13 см.

© «EduCon» басылымдары

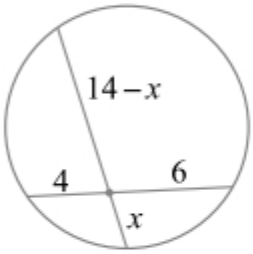
Мысал 8

Екі хорданың біреуі қиылысу нүктесімен 4 см және 6 см болатын кесінділерге бөлінеді. Егер екінші қорданың ұзындығы 14 см болса, онда ол қиылысу нүктесімен қандай кесінділерге бөлінетінін табыңыз.

Шешімі:

Қиылысатын екі хорданың кесінділерінің көбейтіндісі тең болады.

Екінші хорданың кесінділерін x және $14-x$ деп белгілейік:



$$4\cdot 6=(14-x)\cdot x$$
$$24=14x-x^2$$
$$x^2-14x+24=0$$

$$x_1=2 \qquad x_2=12$$

Екі түбір де шешім болады, өйткені олардың қосындысы 14-ке тең.

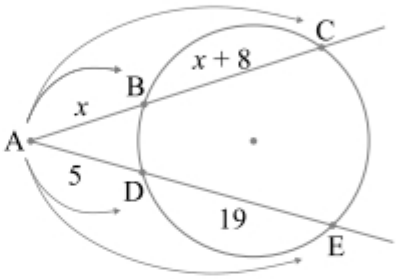
Жауабы: 2 см; 12 см.

Мысал 9

Шеңберден тыс жатқан бір нүктеден екі қиюшы жүргізілді. Бірінші қиюшының ішкі кесіндісі 19 см, ал сыртқы кесіндісі 5 см. Егер екінші қиюшының ішкі кесіндісі сыртқы кесіндісінен 8 см-ге артық болса, онда екінші қиюшының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

Бір нүктеден жүргізілген екі қиюшының кесінділерінің көбейтіндісі тең болады:



$$AB\cdot AC=AD\cdot AE$$
$$x\cdot(2x+8)=5\cdot 24$$
$$2x^2+8x=120$$
$$x^2+4x-60=0$$

$$x_1=-10 \qquad x_2=6$$

$x_1=-10$ – шешім болмайды, өйткені кесіндінің ұзындығы теріс сан бола алмайды.

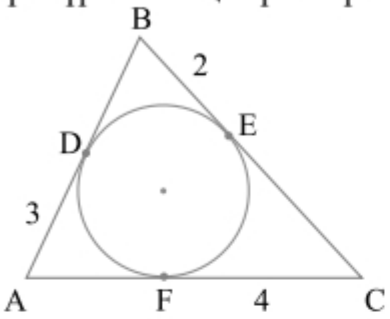
Демек, $AC=2x+8=2\cdot 6+8=20$

Жауабы: 20 см.

© «EduCon» басылымдары

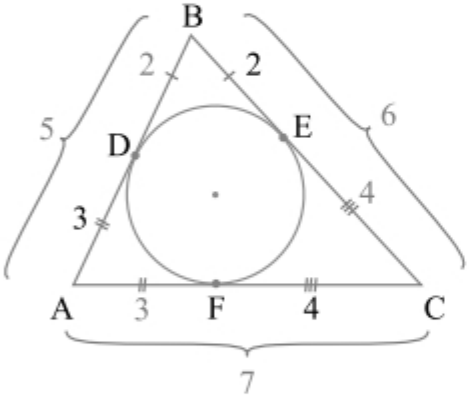
Мысал 10

D, E және F – жанасу нүктелері. ABC үшбұрышының периметрін табыңыз.



Шешімі:

Бір нүктеден жүргізілген жанамалардың кесінділері тең болады:



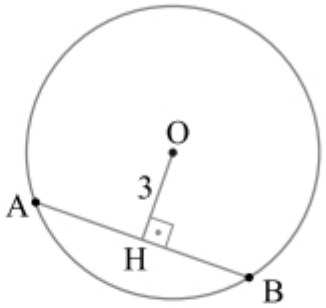
Демек, $P = 5 + 6 + 7 = 18$

Жауабы: 18

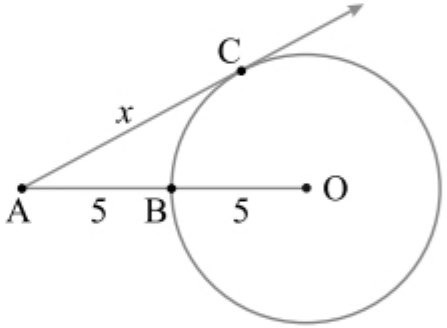
© «EduCon» басылымдары

Есептер

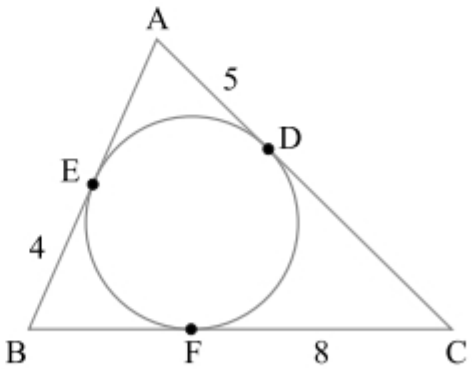
1. Шеңбердің ұзындығы 10π см. Егер $OH = 3$ см болса, онда AB хордасының ұзындығын табыңыз.



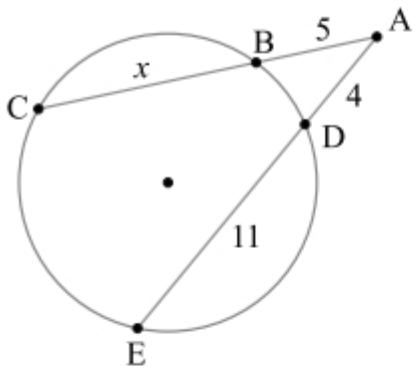
2. C – жанасу нүктесі. x-тің мәнін табыңыз.



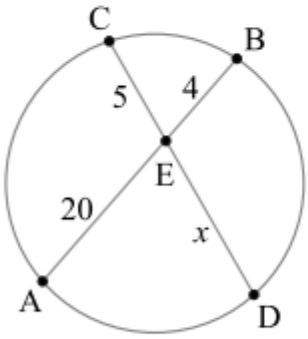
3. D, E және F – жанасу нүктелері. ABC үшбұрышының периметрін табыңыз.



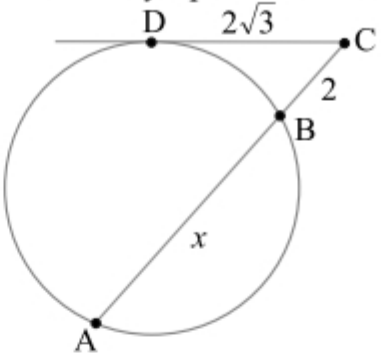
4. x-тің мәнін табыңыз.



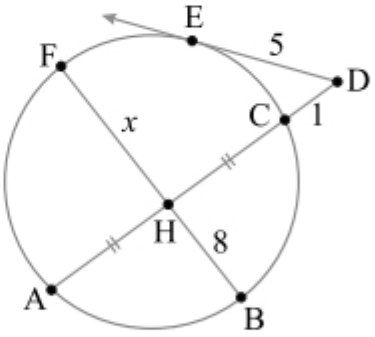
5. x-тің мәнін табыңыз.



6. D – жанасу нүктесі. x-тің мәнін табыңыз.

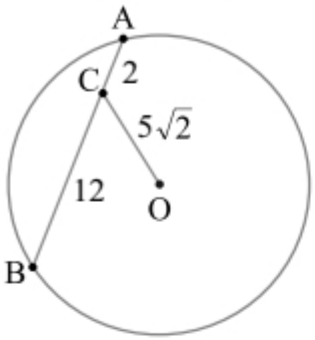


7. E – жанасу нүктесі. x-тің мәнін табыңыз.

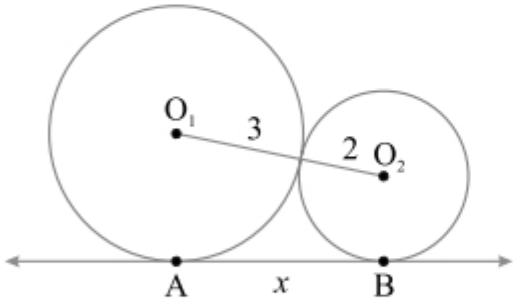


© «EduCon» басылымдары

8. Шеңбердің радиусын табыңыз.



9. A және B – жанасу нүктелері. x-тің мәнін табыңыз.



10. Шеңберден тыс жатқан бір нүктеден екі қиюшы жүргізілді. Бірінші қиюшының ішкі кесіндісі 19 см, ал сыртқы кесіндісі 6 см. Егер екінші қиюшының ішкі кесіндісі сыртқы кесіндісінен 20 см-ге артық болса, онда екінші қиюшының ұзындығын табыңыз.

11. Хорданың ұзындығы 16 см, ал шеңбердің ұзындығы 20π см. Шеңбердің центрінен осы хордаға дейінгі қашықтықты табыңыз.

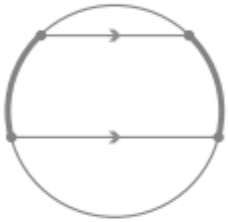
12. Бір-бірімен сырттай жанасатын екі шеңберге ортақ жанама жүргізілді. Жанасу нүктелерінің арақашықтығы 12 см. Егер кіші шеңбердің радиусы 4 см болса, онда үлкен шеңбердің радиусын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

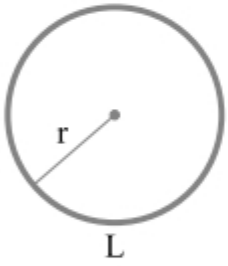
Хордалар мен доғалардың қасиеттері

1. Бірдей доғалар бірдей хордалармен кіріледі және керісінше:

2. Параллель хордалардың арасындағы доғалар тең болады:

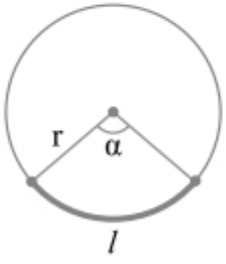


3. Шеңбердің ұзындығы:



$$L = 2\pi r$$

4. Доғаның ұзындығы:



$$l = \alpha \cdot r$$

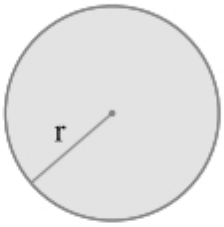
(α – радианмен берілген бұрыш) немесе

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

(α – градуспен берілген бұрыш)

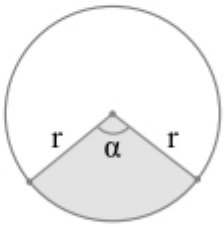
Дөңгелек, сектор және сегменттің ауданы

1. Дөңгелектің ауданы:



$$S = \pi r^2$$

2. Сектордың ауданы:



$$S = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

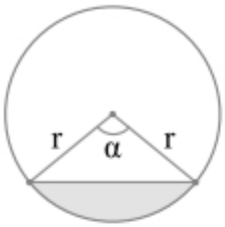
(α – радианмен берілген бұрыш) немесе

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

(α – градуспен берілген бұрыш)

© «EduCon» басылымдары

3. Сегменттің ауданы:



$$S = \frac{1}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha) \cdot r^2$$

(α – радианмен берілген бұрыш)

Мысал 11

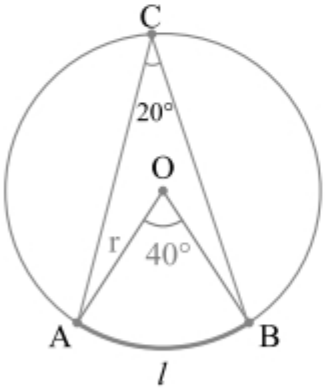
Ұзындығы 24π см болатын шеңбердің іштей сызылған бұрышы 20°. Осы бұрыштың кересін доғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

Бір доғаны кересін центрлік бұрыш іштей сызылған бұрыштан 2 есе үлкен:

$\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$

Шеңбердің ұзындығы:



$L = 2\pi r = 24\pi$

Доғаның ұзындығы:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$l = 24\pi \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{8\pi}{3}$$

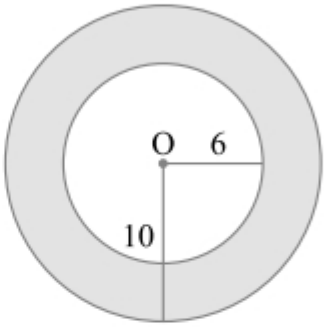
Жауабы: $\frac{8\pi}{3}$ см.

Мысал 12

Радиустары 6 см және 10 см болатын шеңберлердің центрлері ортақ. Осы екі шеңбермен шектелген сақинаның ауданын табыңыз.

Шешімі:

Сақинаның ауданы екі шеңбердің аудандарының айырмасына тең:



Дөңгелектің ауданы:

$S_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$

$S_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$

S_3 – сақинаның ауданы

$S_3 = S_2 - S_1 = 100\pi - 36\pi = 64\pi$

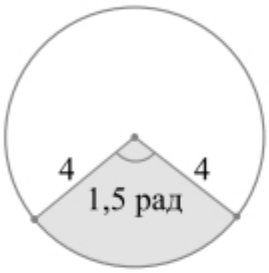
Жауабы: 64π см^2.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 13

Шеңбердің радиусы 4 см. Центрлік бұрышы 1,5 радиан болатын сектордың ауданын табыңыз.

Шешімі:



Сектордың ауданы:

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 16=12$$

Жауабы: 12 см^2.

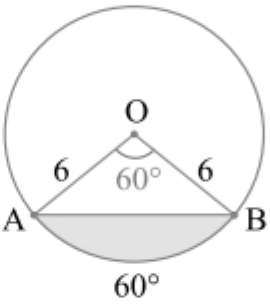
Мысал 14

Шеңбердің радиусы 6 см. Хордамен және 60°-тық доғамен шектелген сегменттің ауданын табыңыз.

Шешімі:

Центрлік бұрыштың градустық өлшемі оның керіп тұрған доғасының градустық өлшеміне тең:

$$\angle AOB=\cup AB$$



$$S_{сегмент}=S_{сектор}-S_{\Delta}$$

$$S_{сегмент}=\pi r^2\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}-\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\alpha$$

$$S_{сегмент}=\pi\cdot 36\cdot\frac{60^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\cdot 36\cdot\sin 60$$

$$S_{сегмент}=6\pi-9\sqrt{3}$$

Жауабы: $\left(6\pi-9\sqrt{3}\right)$см^2.

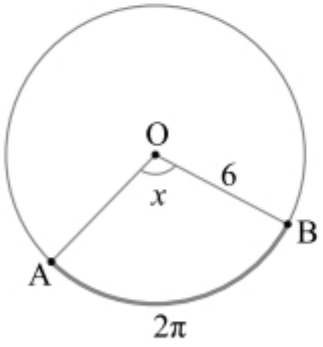
© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Шеңбердің ұзындығы 12π см, ал іштей сызылған бұрышы 30°. Осы бұрыштың керетін доғасының ұзындығын табыңыз.

2. Өлшемі 3 радиан болатын центрлік бұрыш ұзындығы 36 см болатын доғаны керіп тұр. Шеңбердің радиусын табыңыз.

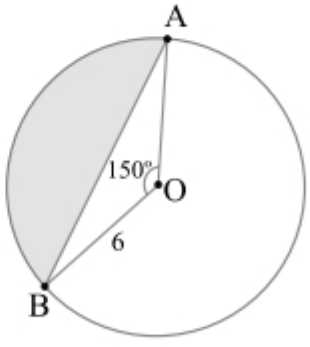
3. x-тің мәнін табыңыз.



4. Шеңбердің радиусы 6 см. Центрлік бұрышы 0,5 радиан болатын сектордың ауданын табыңыз.

5. Шеңбердің радиусы 12 см. Хордамен және 30°-тық доғамен шектелген сегменттің ауданын табыңыз.

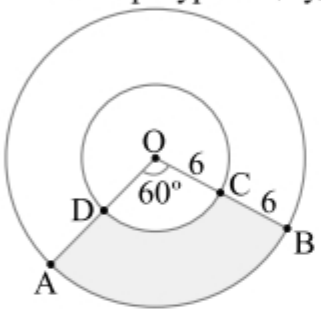
6. Боялған фигураның ауданын табыңыз.



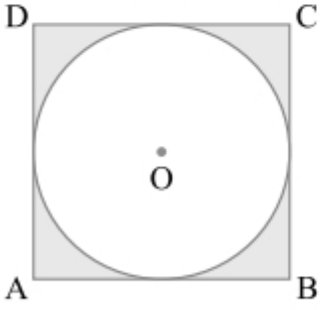
© «EduCon» басылымдары

7. Радиустары 3 см және 7 см болатын шеңберлердің центрлері ортақ. Осы екі шеңбермен шектелген сақинаның ауданын табыңыз.

8. Боялған фигураның ауданын табыңыз.

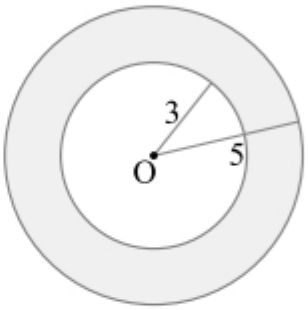


9. ABCD – қабырғасы 4 см болатын квадрат. Боялған фигураның ауданын табыңыз.

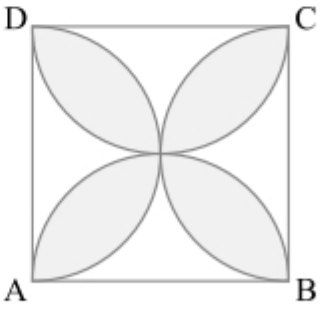


10. Ұзындығы $12\sqrt{3}$ см болатын хорда 120°-тық доғаны керіп тұр. Шеңбердің ұзындығын табыңыз.

11. Боялған фигураның ауданын табыңыз.



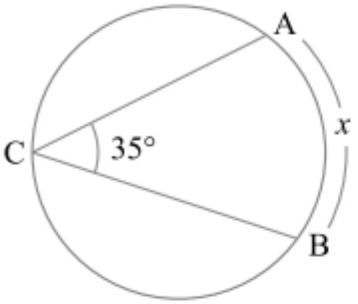
12. ABCD – қабырғасы 8 см болатын квадрат. Боялған фигураның ауданын табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

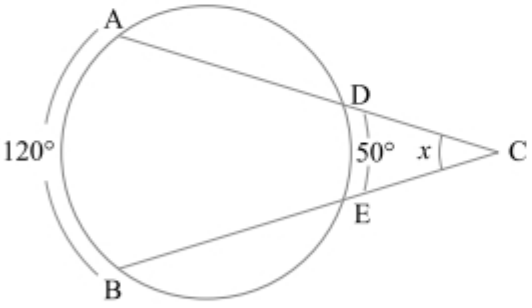
ТЕСТ №9

1. x-тің мәнін табыңыз.



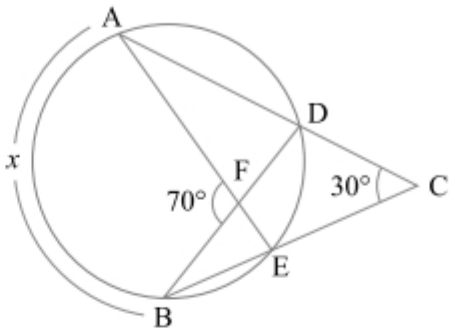
A) 60°
B) 70°
C) 35°
D) 55°
E) 45°

2. x-тің мәнін табыңыз.



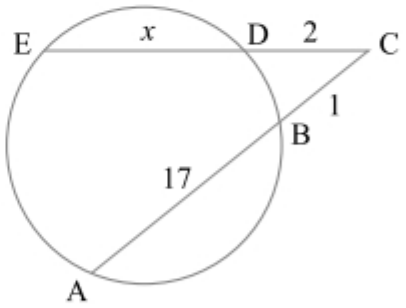
A) 35°
B) 70°
C) 85°
D) 45°
E) 55°

3. x-тің мәнін табыңыз.



A) 100°
B) 60°
C) 130°
D) 120°
E) 110°

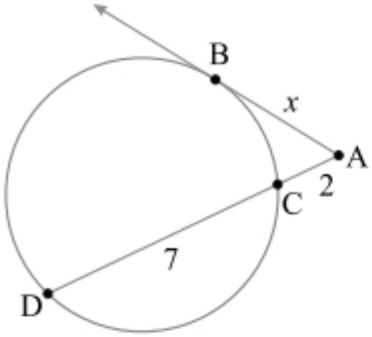
4. x-тің мәнін табыңыз.



A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

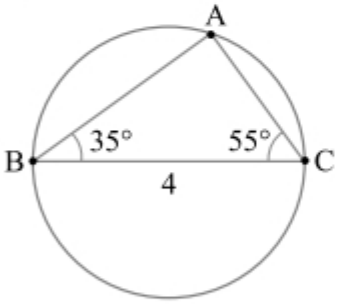
© «EduCon» басылымдары

5. B – жанасу нүктесі. x-тің мәнін табыңыз.



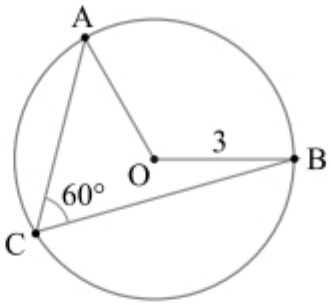
A) $4\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) $3\sqrt{5}$

6. Дөңгелектің ауданын табыңыз.



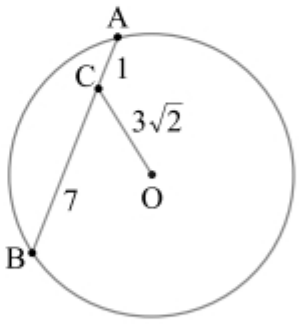
A) 2π
B) 16π
C) 8π
D) 9π
E) 4π

7. Өлшемі 60° болатын іштей сызылған бұрыштың керетін доғасының ұзындығын табыңыз.



A) 2π
B) 8π
C) 9π
D) 16π
E) 6π

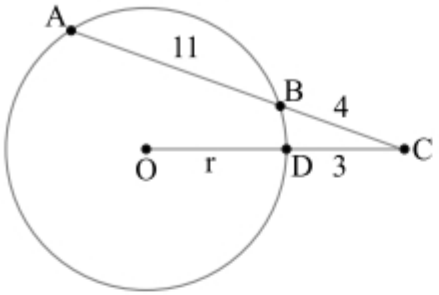
8. Шеңбердің радиусын табыңыз.



A) 6
B) 8
C) 5
D) 4
E) 7

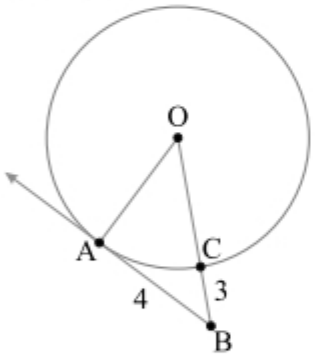
© «EduCon» басылымдары

9. Шеңбердің радиусын табыңыз.



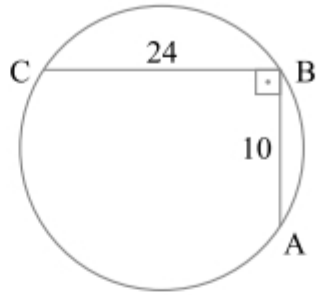
A) 6,5
B) 7,5
C) 8,5
D) 9,5
E) 10,5

10. A – жанасу нүктесі. Дөңгелектің ауданын табыңыз.



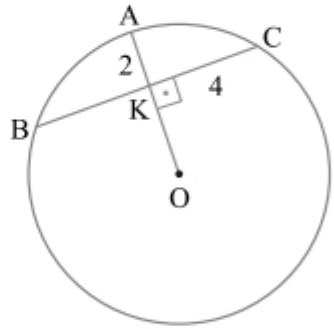
A) $\frac{7\pi}{6}$
B) 16π
C) 6π
D) $\frac{49\pi}{36}$
E) 36π

11. Шеңбердің ұзындығын табыңыз.



A) 13π
B) 24π
C) 12π
D) 26π
E) 28π

12. Дұрыс теңдік(-тер)ді анықтаңыз.



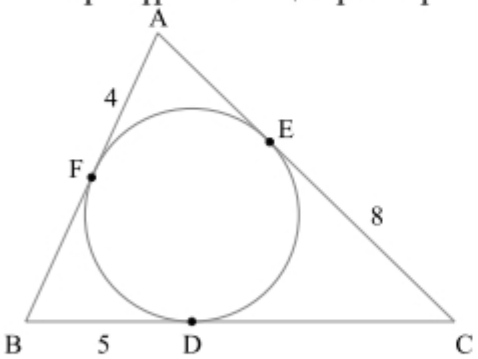
A) $R = 6$
B) $l = 10\pi$
C) $\mathrm{KO} = 4$
D) $S = 36\pi$
E) $l = 12\pi$
F) $R = 5$
G) $\mathrm{KO} = 2$
H) $S = 25\pi$

© «EduCon» басылымдары

13. Радиусы 2,5 дм болатын шеңбердің центрінен 15 см қашықтықта орналасқан хорданың ұзындығын табыңыз.
A) 3 дм
B) 3,2 дм
C) 40 см
D) 300 мм
E) 200 мм
F) 32 см
G) 4 дм
H) 30 см

14. Шеңбердің радиусы 18 см. Доғасының градустық өлшемі 150° болатын сектордың ауданын табыңыз.
A) 105π см^2
B) 144π см^2
C) 112π см^2
D) 145π см^2
E) 135π см^2

15. ABC үшбұрышының периметрін табыңыз.



A) 36
B) 24
C) 17
D) 34
E) 48

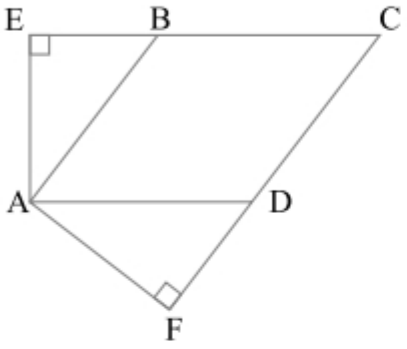
16. Радиустары 4 см және 7 см болатын шеңберлердің центрлері ортақ. Осы екі шеңбермен шектелген сақинаның ауданын табыңыз.
A) 36π см^2
B) 33π см^2
C) 43π см^2
D) 49π см^2
E) 65π см^2

17. Шеңбердің радиусы 6 см. Хордамен және 30°-тық доғамен шектелген сегменттің ауданын табыңыз.
A) $(4\pi - 8)$ см^2
B) $(3\pi - 6)$ см^2
C) $(2\pi - 9)$ см^2
D) $(3\pi - 9)$ см^2
E) $(3\pi - 4)$ см^2

© «EduCon» басылымдары

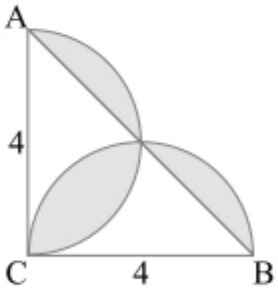
ТАРАУДЫ БЕКІТУ ТЕСТІ №3

1. ABCD – параллелограмм. Егер $AE \perp BC$, $AF \perp DC$ және $\angle EAF = 120°$ болса, онда ADC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



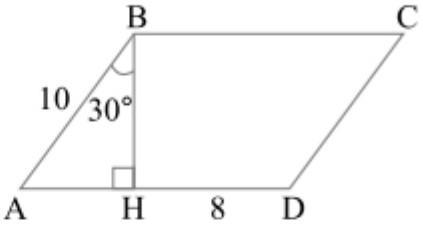
A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 140°
E) 150°

2. ABC – тікбұрышты үшбұрыш. AC және CB жарты шеңберлердің диаметрлері. Фигураның боялған бөлігінің ауданын табыңыз.



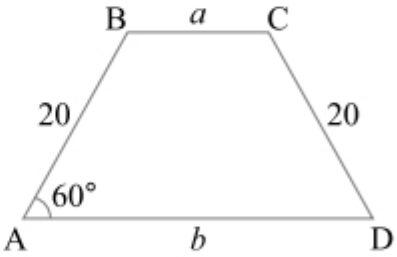
A) $(4\pi - 8)$ см²
B) $(\pi - 2)$ см²
C) $(2\pi - 8)$ см²
D) $(16\pi - 8)$ см²
E) $(4\pi - 2)$ см²

3. ABCD параллелограмында BH биіктігі жүргізілген. Параллелограмның ауданын табыңыз.



A) $55\sqrt{3}$ см²
B) $45\sqrt{3}$ см²
C) $30\sqrt{2}$ см²
D) $65\sqrt{3}$ см²
E) $25\sqrt{2}$ см²

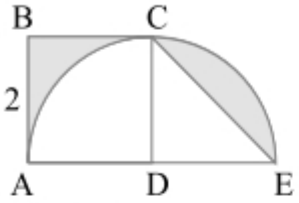
4. Егер $a + b = 46$ болса, онда трапецияның табандарын табыңыз.



A) 12 см
B) 13 см
C) 14 см
D) 18 см
E) 28 см
F) 32 см
G) 33 см
H) 34 см

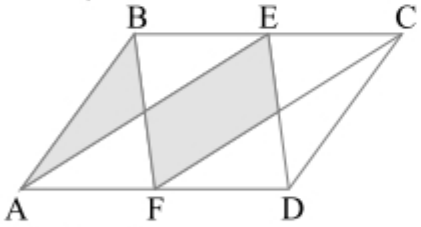
© «EduCon» басылымдары

5. ABCD – шаршы. AE жарты шеңбердің диаметрі. Фигураның боялған бөлігінің ауданын табыңыз.



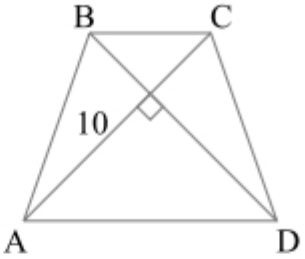
A) 1 см^2
B) 2 см^2
C) 3 см^2
D) 4 см^2
E) 5 см^2

6. E және F нүктелері – ABCD параллелограмының BC және AD қабырғаларының орталары. Егер ABCD параллелограмының ауданы 24 см^2 болса, онда параллелограмның боялған бөліктерінің аудандарының қосындысын табыңыз.



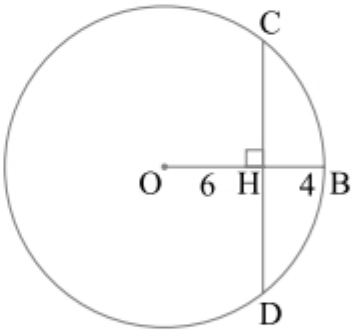
A) 12 см^2
B) 10 см^2
C) 8 см^2
D) 9 см^2
E) 16 см^2

7. Диагоналінің ұзындығы көрсетілген теңбүйірлі трапецияның ауданын табыңыз.



A) 100 см^2
B) 50 см^2
C) 75 см^2
D) 125 см^2
E) 150 см^2

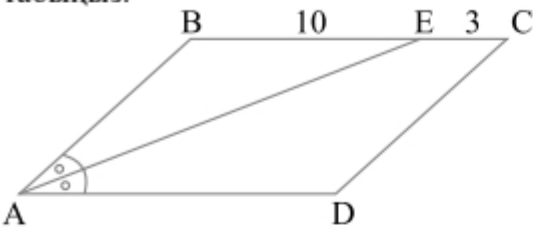
8. Дұрыс теңдік(-тер)ді анықтаңыз.



A) $CD = 16$ см
B) $R = 12$ см
C) $l = 18\pi$ см
D) $S = 64\pi$ см^2
E) $R = 8$ см
F) $l = 16\pi$ см
G) $CD = 12$ см
H) $S = 100\pi$ см^2

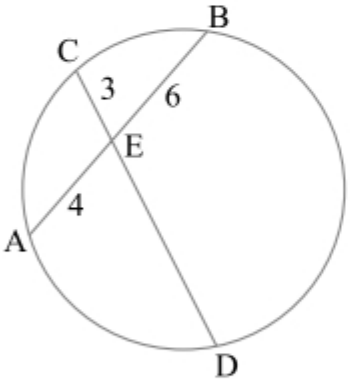
© «EduCon» басылымдары

9. ABCD параллелограмында AE биссектриса болса, параллелограмның периметрін табыңыз.



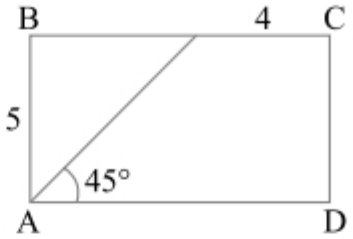
A) 23 см
B) 36 см
C) 32 см
D) 46 см
E) 52 см

10. ED кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



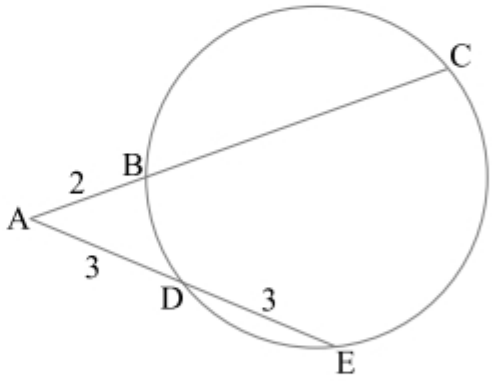
A) 9 см
B) 10 см
C) 7 см
D) 8 см
E) 12 см

11. ABCD тіктөртбұрышының ауданын табыңыз.



A) 35 см^2
B) 60 см^2
C) 20 см^2
D) 45 см^2
E) 40 см^2

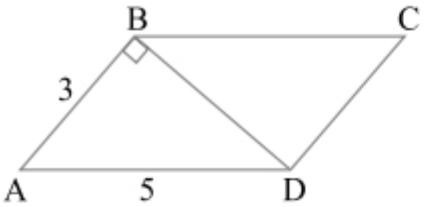
12. BC кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



A) 9 см
B) 10 см
C) 7 см
D) 8 см
E) 6 см

© «EduCon» басылымдары

13. ABCD параллелограмының ауданын табыңыз.

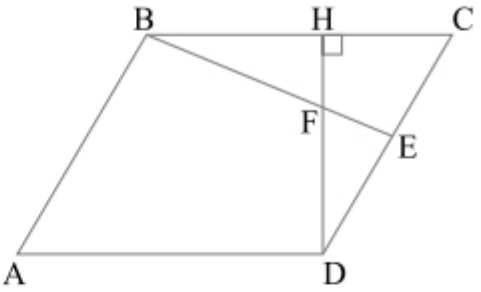


A) 12 см^2
B) 24 см^2
C) 20 см^2
D) 15 см^2
E) 30 см^2

14. Ауданы 64π см^2 болатын дөңгелектің диаметрін табыңыз.

A) 8 см
B) 16 см
C) 12 см
D) 24 см
E) 10 см

15. Егер $\angle BFH = 70^\circ$ және $\angle FED = 80^\circ$ болса, онда DC мен HC кесінділері қандай қатынаста болатынын табыңыз.



A) 3:2
B) 3:1
C) 5:4
D) 2:1
E) 8:7

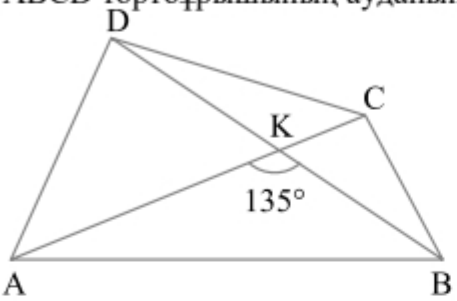
16. Ауданы қабырғалары 6 см және 8 см болатын шаршылардың аудандарының қосындысына тең болатын шаршының қабырғасын табыңыз.

A) 12 см
B) 18 см
C) 14 см
D) 11 см
E) 10 см

© «EduCon» басылымдары

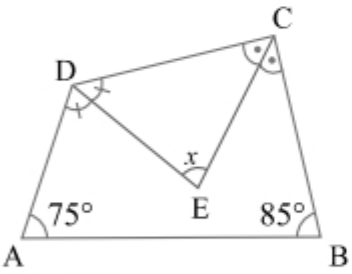
ТАРАУДЫ БЕКІТУ ТЕСТІ №4

1. Егер $AC = 6\sqrt{2}$ см, DB=8см болса, онда ABCD төртбұрышының ауданын табыңыз.



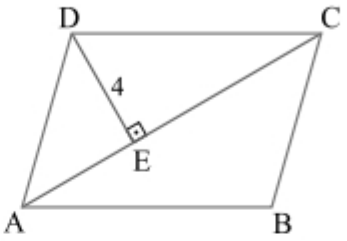
A) 20 см²
B) 32 см²
C) 24 см²
D) 26 см²
E) 48 см²

2. x-тің мәнін табыңыз.



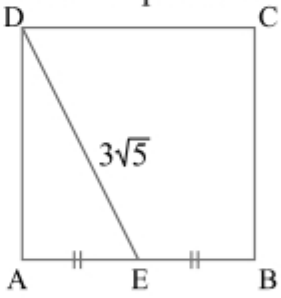
A) 110°
B) 100°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

3. ABCD – параллелограмм. Егер $AC = 10$ см болса, онда параллелограмның ауданын табыңыз.



A) 80 см²
B) 32 см²
C) 48 см²
D) 20 см²
E) 40 см²

4. ABCD шаршысының периметрін табыңыз.



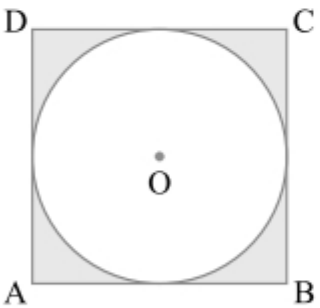
A) 6
B) 18
C) 36
D) 28
E) 24

© «EduCon» басылымдары

5. Параллелограмның доғал бұрышының биссектрисасы қарама-қарсы қабырғаны сүйір бұрыштың төбесінен санағанда 4:5 қатынасындай етіп бөледі. Егер параллелограмның периметрі 52 см болса, онда оның қабырғаларын табыңыз.
   A) 8 см
   B) 10 см
   C) 12 см
   D) 14 см
   E) 16 см
   F) 18 см
   G) 20 см
   H) 22 см

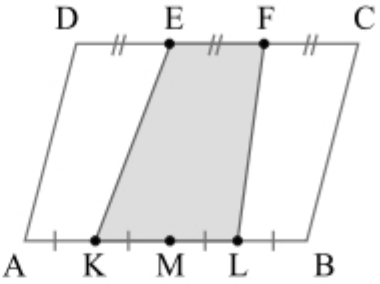
6. Ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусы 6 см, ал бұрыштарының біреуі 30°. Ромбының периметрін табыңыз.
   A) 96 см
   B) 48 см
   C) 24 см
   D) 72 см
   E) 64 см

7. ABCD – қабырғасы 2 см болатын квадрат. Боялған фигураның ауданын табыңыз



   A) $(1-\pi)$ см²
   B) $(2-\pi)$ см²
   C) $(\pi-4)$ см²
   D) $(\pi-2)$ см²
   E) $(4-\pi)$см²

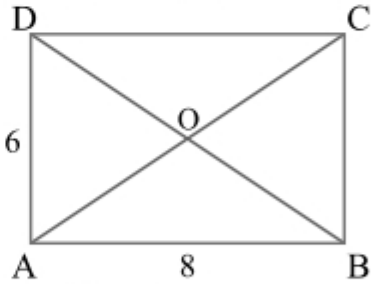
8. ABCD параллелограмының ауданы 60 см² . Боялған фигураның ауданын табыңыз.



   A) 25 см²
   B) 30 см²
   C) 24 см²
   D) 36 см²
   E) 20 см²

9. Шеңберге сырттай сызылған тікбұрышты трапецияның бүйір қабырғалары 12 см және 18 см. Осы трапецияның ауданын табыңыз.
   A) 120 см²
   B) 270 см²
   C) 144 см²
   D) 324 см²
   E) 180 см²

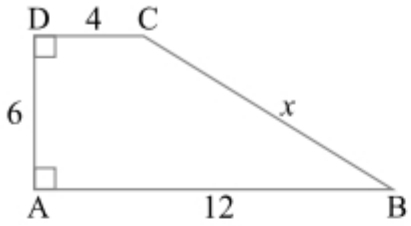
10. ABCD тік төртбұрышы үшін дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.



   A) $OC=4$
   B) $P_{AOB}=16$
   C) $S_{ADO}=20$
   D) $BO=5$
   E) $S_{DOC}=12$
   F) $AC=12$
   G) $P_{BOC}=16$
   H) $S_{AOB}=16$

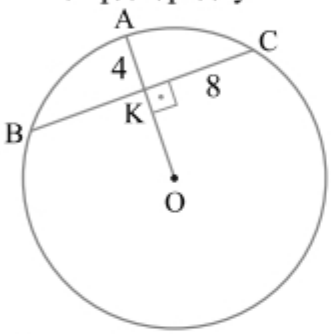
© «EduCon» басылымдары

11. ABCD – трапеция. x-тің мәнін табыңыз.



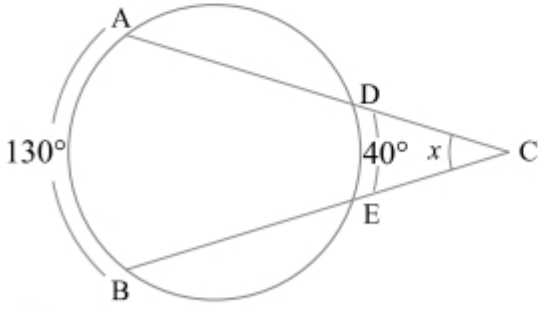
A) 16
B) 15
C) 13
D) 12
E) 10

12. Шеңбердің радиусын табыңыз.



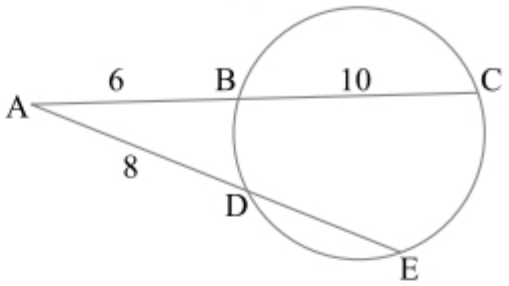
A) 8
B) 9
C) 12
D) 14
E) 10

13. x-тің мәнін табыңыз.



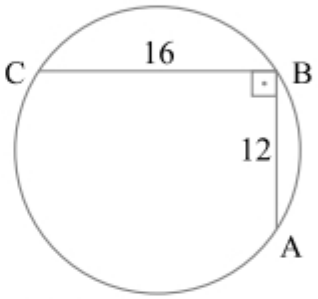
A) 35°
B) 70°
C) 85°
D) 45°
E) 55°

14. DE кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

15. Шеңбердің ұзындығын табыңыз.



A) 18π
B) 20π
C) 24π
D) 10π
E) 32π

16. Ішкі бұрышы 120° болатын дұрыс көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.

A) 5
B) 4
C) 6
D) 8
E) 7

© «EduCon» басылымдары

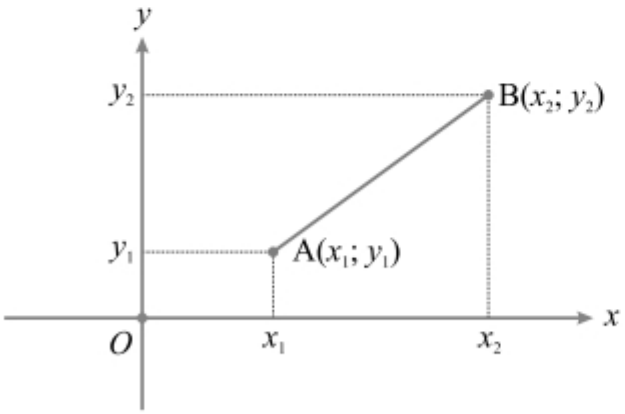
Жазықтықтағы кез келген нүктеге екі сан сәйкес келеді:

абсцисса x_0 және ордината y_0

Бұл сандар берілген нүктенің координаталары деп аталады

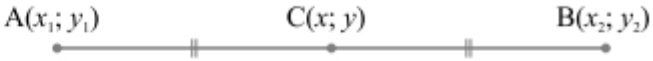
КЕСІНДІ

1) Екі нүктенің арақашықтығы



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2) Кесіндінің орта нүктесінің координаталары



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

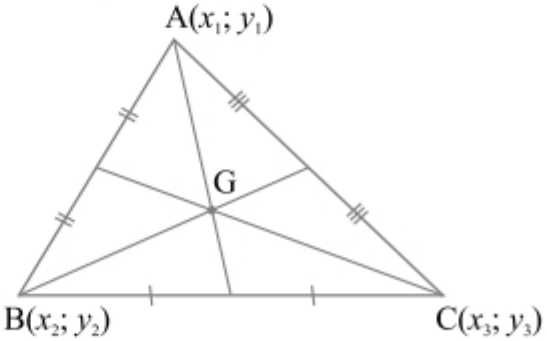
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3) Берілген қатынаста кесіндіні бөлетін нүктенің координаталары

$$x = \frac{x_1 \cdot n + x_2 \cdot m}{m + n}$$

$$y = \frac{y_1 \cdot n + y_2 \cdot m}{m + n}$$

4) Үшбұрыштың ауырлық центрінің координаталары



$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

© «EduCon» басылымдары

БҰРЫШТЫҚ КОЭФФИЦИЕНТІМЕН БЕРІЛЕТІН ТҮЗУДІҢ ТЕҢДЕУІ

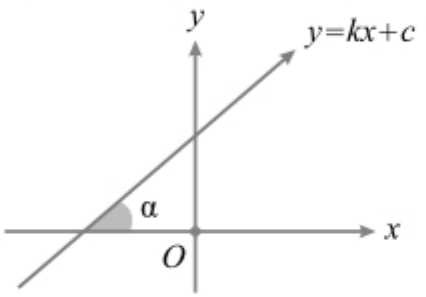
$$y = kx + c$$

k – түзудің бұрыштық коэффициенті

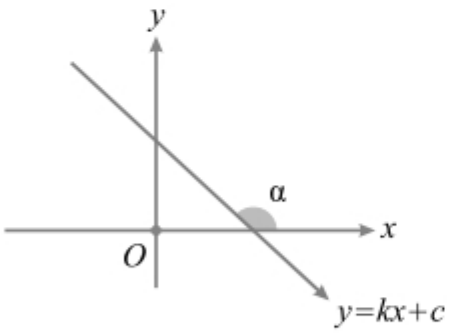
Түзудің Ox осіне көлбеу бұрышының тангенсі түзудің бұрыштық коэффициентіне тең. Яғни,

$$tg\alpha = k$$

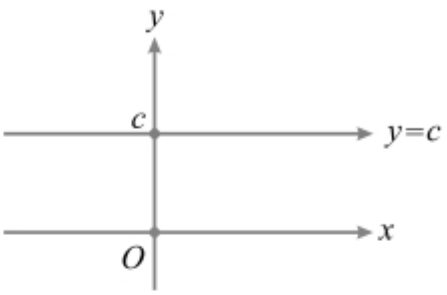
1) Егер $k > 0$ болса, онда Ox осі мен түзудің арасындағы бұрыш сүйір болады:



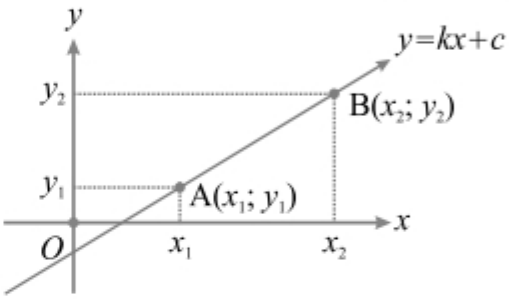
2) Егер $k < 0$ болса, онда Ox осі мен түзудің арасындағы бұрыш доғал болады:



3) Егер $k = 0$ болса, онда түзу Ox осіне параллель болады және $y = c$ түрінде жазылады:

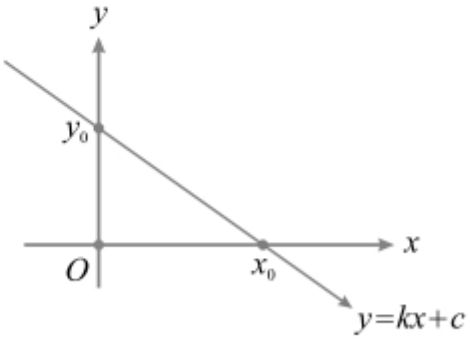


4) Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

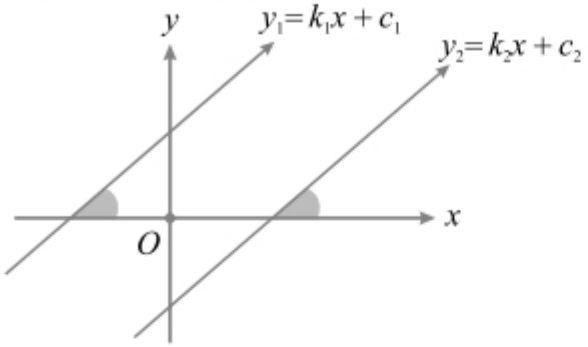
5) Координаталар остерін $(0; y_0)$ және $(x_0; 0)$ нүктелерінде қиып өтетін түзудің теңдеуі



$$\frac{y}{y_0} + \frac{x}{x_0} = 1$$

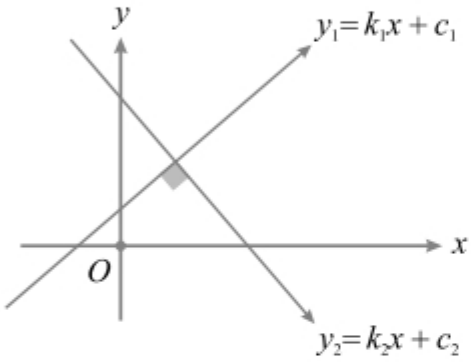
© «EduCon» басылымдары

6) Параллель түзулер



$$k_1 = k_2$$

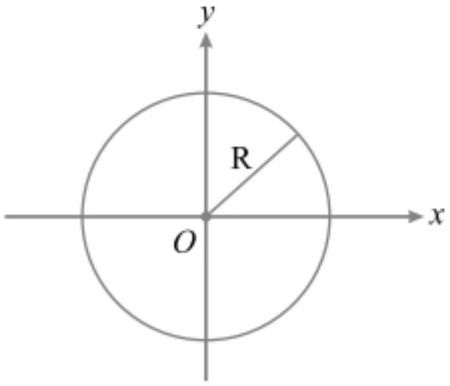
7) Перпендикуляр түзулер



$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

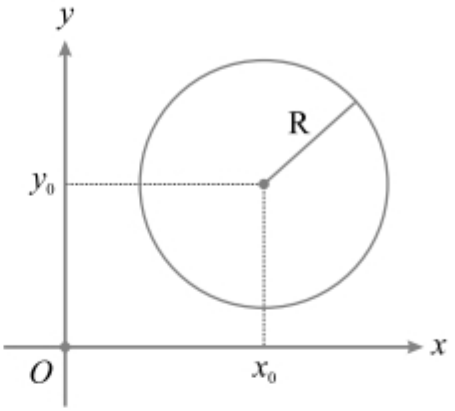
ШЕҢБЕРДІҢ ТЕҢДЕУІ

1) Центрі координаталар басында орналасатын шеңбердің теңдеуі



$$x^2 + y^2 = R^2$$

2) Центрі $(x_0; y_0)$ нүктесінде орналасатын шеңбердің теңдеуі



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Мысал 1

Егер A(4; 7) және B(8;10) болса, онда AB кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

$$AB = \sqrt{(8-4)^2 + (10-7)^2}$$

$$AB = \sqrt{16+9}$$

$$AB = 5$$

Жауабы: 5.

Мысал 2

Егер P(–4; 8) және Q(10; 4) болса, онда Q нүктесіне қарағанда P нүктесіне симметриялы M нүктесінің координаталарын табыңыз.

Шешімі:

Q нүктесі PM кесіндісінің орта нүктесі болып табылады.

P(–4; 8) Q(10; 4) M(*x*; *y*)

© «EduCon» басылымдары

$\frac{-4+x}{2}=10$ $\qquad$ $\frac{8+y}{2}=4$

$-4+x=20$ $\qquad$ $8+y=8$

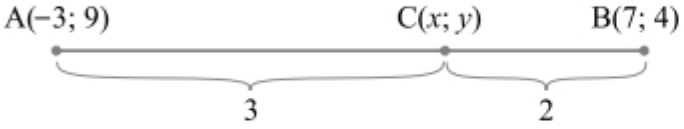
$x=24$ $\qquad$ $y=0$

Жауабы: $\mathrm{M}(24;\,0)$.

Мысал 3

Егер A(–3; 9) және B(7; 4) болса, онда AB кесіндісін 3:2 қатынасындай етіп бөлетін нүктенің координаталарын табыңыз.

Шешімі:



$$x=\frac{-3\cdot 2+7\cdot 3}{3+2}=\frac{15}{5}=3$$

$$y=\frac{9\cdot 2+4\cdot 3}{3+2}=\frac{30}{5}=6$$

Жауабы: $\mathrm{C}(3;\,6)$.

Мысал 4

A(6; –2) және B(8; 10) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{y+2}{10+2}=\frac{x-6}{8-6}$

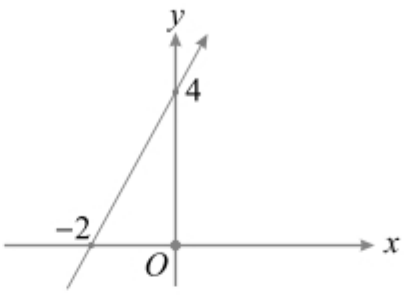
$\frac{y+2}{12}=\frac{x-6}{2}$

$y=6x-38$

Жауабы: $y=6x-38$

Мысал 5

Төмендегі суретте көрсетілген түзудің теңдеуін жазыңыз:



Шешімі:

$\frac{y}{y_0}+\frac{x}{x_0}=1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{y}{4}-\frac{x}{2}=1$

$y-2x=4$

$y=2x+4$

Жауабы: $y=2x+4$

Мысал 6

$y=2x+6$ түзуіне параллель болатын және M(3;20) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

Егер түзулер параллель болса, онда олардың бұрыштық коэффициенттері тең болады:

$$\left.\begin{array}{l}\longrightarrow\ y=2x+6\\ \mathrm{M}(3;\,20)\\ \longrightarrow\ y=kx+c\end{array}\right\}\ k=2$$

$y=2x+c$

$20=2\cdot 3+c$

$c=14$

Жауабы: $y=2x+14$.

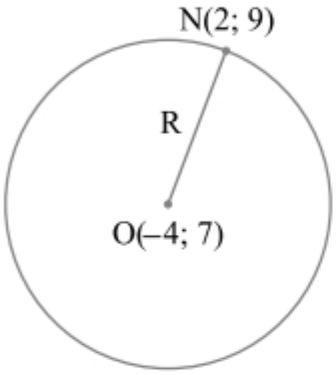
© «EduCon» басылымдары

Мысал 7

Центрі O(–4;7) нүктесінде орналасқан және N(2;9) нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

Шеңбердің радиусын есептейік:



$$R=\sqrt{(2+4)^2+(9-7)^2}=\sqrt{40}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

$$\Downarrow$$

$$(x+4)^2+(y-7)^2=\left(\sqrt{40}\right)^2$$

$$x^2+8x+16+y^2-14y+49=40$$

$$x^2+y^2+8x-14y+25=0$$

Жауабы: $x^2+y^2+8x-14y+25=0$

Мысал 8

$x^2-8x+y^2+10y-8=0$ теңдеуімен берілген шеңбердің центрінің координаталары мен радиусын табыңыз.

Шешімі:

Толық квадраттарды бөліп алайық:

$$x^2-8x+y^2+10y-8=0$$

$$x^2-8x+16-16+y^2+10y+25-25-8=0$$

$$(x-4)^2-16+(y+5)^2-25-8=0$$

$$(x-4)^2+(y+5)^2=49$$

$$x-4=0 \qquad y+5=0 \qquad R^2=49$$

$$x=4 \qquad y=-5 \qquad R=7$$

Жауабы: $O(4;-5),\ R=7.$

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. MN кесіндісінің ұзындығы $\sqrt{29}$. Егер M(4;5) және N(6;k) болса, онда k-ның қабылдайтын барлық мәндерін табыңыз.

2. ABCD параллелограммының үш төбесінің координаталары A(–4;–5;6), B(–8;4;–6) және C(4;–3;2) болса, онда D төбесінің координаталарын табыңыз.

3. Егер A(8;–3) және B(–4; 2) болса, онда AB кесіндісінің ортасынан координатар басына дейінгі қашықтықты табыңыз.

4. A(–4;6) және B(8;–2) нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициентін табыңыз.

5. $y = 5x - 6$ түзуіне параллель болатын және M(3;22) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

6. Егер A(4;16) және B(8;–4) болса, онда AB кесіндісін 3:1 қатынасындай етіп бөлетін нүктенің координаталарын табыңыз.

7. Егер P(–8;10) және Q(10;6) болса, онда Q нүктесіне қарағанда P нүктесіне симметриялы M нүктесінің координаталарын табыңыз.

8. Егер M(–5;7) және N(10;2) болса, онда MN кесіндісін 2:3 қатынасындай етіп бөлетін нүктенің координаталарын табыңыз.

9. Центрі (5;–2) нүктесінде орналасқан және (–3;4) нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңыз.

10. $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 3 = 0$ теңдеуімен берілген шеңбердің центрінің координаталары мен радиусын табыңыз.

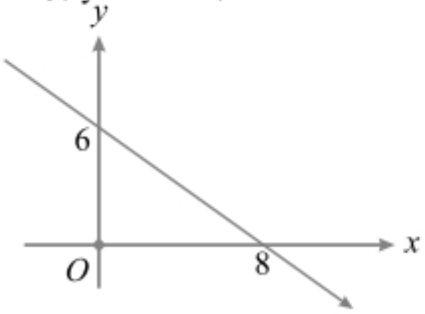
© «EduCon» басылымдары

11. $y = 7x + 3$ түзуіне перпендикуляр болатын және M(21;8) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

12. Радиусы 4 см, ал центрі (–4;6) нүктесінде орналасатын шеңбердің теңдеуін жазыңыз.

13. A(2; 5), B(3; 1) және C(7; 3) нүктелері ABC үшбұрышының төбелері болып келеді. Үшбұрыштың AC қабырғасына параллель болатын орта сызығының ұзындығын табыңыз.

14. Төмендегі суретте көрсетілген түзудің теңдеуін жазыңыз:

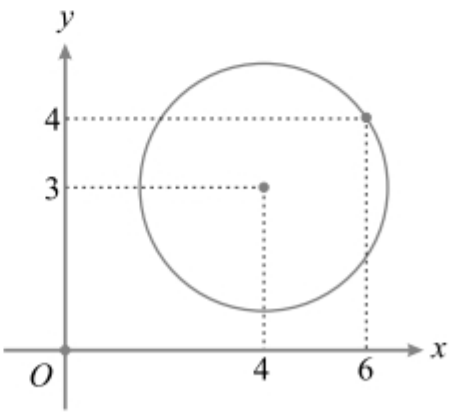


15. A(2; –5), B(2; 12) және C(4; 6) нүктелері ABC үшбұрышының төбелері. Үшбұрыштың CM медианасы арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

16. $x^2 + 16x + y^2 - 8y - 1 = 0$ теңдеуімен берілген шеңбердің радиусын табыңыз.

17. Радиусы 2 см, ал центрі (8;0) нүктесінде орналасатын шеңбер мен $x^2 + y^2 = 36$ теңдеуімен берілген шеңбердің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңыз.

18. Төмендегі суретте көрсетілген шеңбердің теңдеуін жазыңыз.



© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №10

1. Егер M(8;–3) және H(–4; 2) болса, онда MH кесіндісінің ұзындығын табыңыз.
   A) 10
   B) 15
   C) 12
   D) 13
   E) 14

2. Егер A(9;14) және B(4;–1) болса, онда AB кесіндісін 3:2 қатынасындай етіп бөлетін T нүктесінің координаталарын табыңыз.
   A) T(–3;4)
   B) T (6;5)
   C) T (5;7)
   D) T (–4;2)
   E) T (–6;4)

3. Егер P(5;–7) және Q(4;2) болса, онда Q нүктесіне қарағанда P нүктесіне симметриялы M нүктесінің координаталарын табыңыз.
   A) M(–3;11)
   B) M(4;–6)
   C) M(11;3)
   D) M(3;11)
   E) M(8;–4)

4. A(6; –4) және B(3;–1) нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициентін табыңыз.
   A) 1
   B) 2
   C) –2
   D) 3
   E) –1

5. $y = 4x + 2$ түзуіне параллель және M(–3;4) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
   A) $y = 4x + 8$
   B) $y = -4x - 2$
   C) $y = 2x + 10$
   D) $y = 4x + 16$
   E) $y = -\frac{1}{4}x + 4$

6. Центрі (3;–6) нүктесінде орналасқан және (–1;2) нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңыз.
   A) $x^2 + 6x + y^2 - 12y + 35 = 0$
   B) $x^2 - 6x + y^2 - 12y - 45 = 0$
   C) $x^2 - 6x + y^2 + 12y - 35 = 0$
   D) $x^2 - 6x - y^2 - 12y + 35 = 0$
   E) $x^2 - 12x + y^2 + 6y - 45 = 0$

© «EduCon» басылымдары

7. Төмендегі түзулердің арасынан өзара перпендикуляр түзулерді табыңыз:
   A) $y=4x+6$ және $y=4x-2$
   B) $y=3x-4$ және $y=\frac{1}{3}x+7$
   C) $y=4x+8$ және $y=11x-7$
   D) $y=2x-8$ және $y=-0{,}5x+3$
   E) $y=9x-1$ және $y=3x+4$

8. Катеттері 3 см және 4 см болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлерінің арақашықтығын табыңыз.
   A) $0{,}5\sqrt{5}$ см
   B) $2\sqrt{3}$ см
   C) $0{,}5\sqrt{3}$ см
   D) $2\sqrt{5}$ см
   E) $4\sqrt{5}$ см

9. $x^2-8x+y^2-4y-5=0$ теңдеуімен берілген шеңбердің радиусын табыңыз.
   A) 6
   B) 7
   C) 5
   D) 4
   E) 3

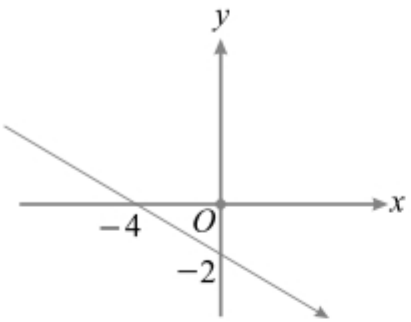
10. $y=8-x$ түзуі мен $(x-4)^2+(y-4)^2=32$ шеңберінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңыз.
   A) $(0;8),(8;0)$
   B) $(0;4),(4;0)$
   C) $(2;6),(3;5)$
   D) $(4;4),(8;0)$
   E) $(1;7),(7;1)$

11. Төбелері A(–3; –1), B(4; 6) және C(8; –2) нүктелері болатын үшбұрыштың ауырлық центрінің координаталарын табыңыз.
   A) G(3;1)
   B) G(–3; 1)
   C) G(1; –3)
   D) G(–2; –6)
   E) G(6; 1)

12. M(4;6) және N(6;–2) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
   A) $y-x+10=0$
   B) $2y+x-16=0$
   C) $3y-x-14=0$
   D) $y+4x-22=0$
   E) $y+2x-10=0$

© «EduCon» басылымдары

13. Төмендегі суретте көрсетілген түзудің теңдеуін жазыңыз:

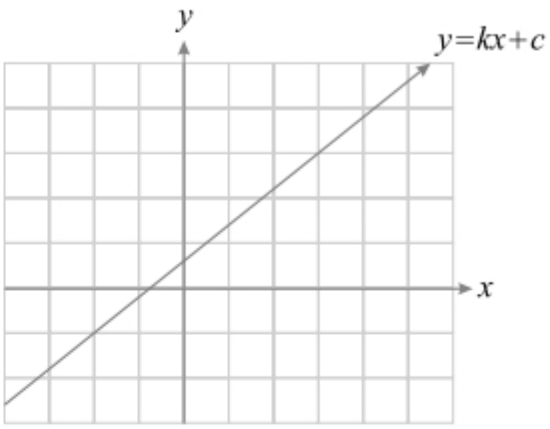


A) $y = x + 4$
B) $y = -2x - 2$
C) $y = 2x + 4$
D) $y = -0{,}5x - 2$
E) $y = -\frac{1}{4}x - 2$

14. Төбелері A(10; 26), B(0; 0) және C(6; 4) болатын үшбұрыштың BM медианасының ұзындығын табыңыз.
A) 17
B) 16
C) 18
D) 19
E) 15

15. Егер үшбұрыштың қабырғаларының орта нүктелерінің координаталары (1; 2), (2; –3) және (5; 1) болса, онда оның төбелерінің координаталарын табыңыз.
A) (4; 6)
B) (3; 2)
C) (4; –1)
D) (–2; –2)
E) (5; 3)
F) (6; –4)
G) (8; 6)
H) (4; –4)

16. Төмендегі суретте көрсетілген түзудің бұрыштық коэффициентін табыңыз:



A) 0,5
B) 0,4
C) 0,6
D) 0,8
E) 0,2

17. Абсцисса осіне параллель және N(4; –5) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
A) $y = 5$
B) $y = -4$
C) $y = 3$
D) $y = -5$
E) $y = 4$

18. $2x^2 - 12x + 2y^2 + 4y + 2 = 0$ теңдеуімен берілген шеңбер туралы дұрыс тұжырым(-дар)ды табыңыз.
A) O(–3; 1) – шеңбер центрі
B) $R = 2\sqrt{2}$
C) $D = 8$
D) O(3; –1) – шеңбер центрі
E) $R = \sqrt{11}$
F) $D = 4\sqrt{2}$
G) O(3; 1) – шеңбер центрі
H) $R = 3$

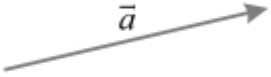
© «EduCon» басылымдары

Бағытталған кесінді вектор деп аталады

1) Вектордың белгіленуі

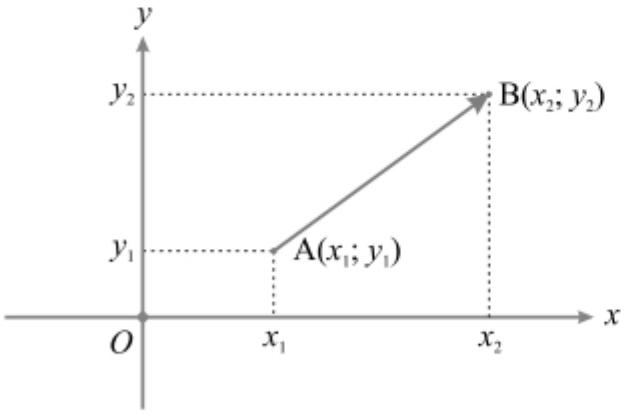
Басы А нүктесінде, ал ұшы В нүктесінде орналасатын вектор $\overrightarrow{AB}$ деп белгіленеді.

Сонымен қатар векторды кіші латын әрпімен де белгілеуге болады:



2) Вектордың координаталары

Вектордың координаталарын табу үшін вектордың ұшының координаталарынан басының сәйкес координаталарын азайтамыз.



$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$$

3) Вектордың ұзындығы

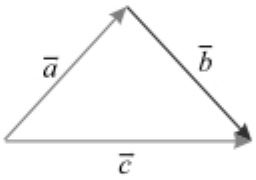
Вектордың басы мен ұшының арақашықтығы оның ұзындығы немесе абсолюттік шамасы деп аталады.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

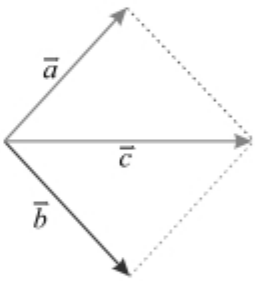
4) Екі вектордың қосындысы

Екі вектордың қосындысы үшбұрыш немесе параллелограмм ережесімен анықталады:

Үшбұрыш ережесі



Параллелограмм ережесі



Векторды параллель жылжытқан кезде, вектордың координаталары өзгермейді.

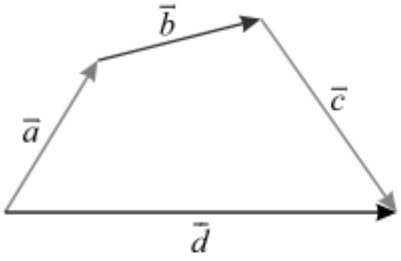
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a}(x_1;\ y_1) + \vec{b}(x_2;\ y_2) = \vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$$
$$\vec{a}(x_1;\ y_1) - \vec{b}(x_2;\ y_2) = \vec{c}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$$

© «EduCon» басылымдары

5) Бірнеше векторлардың қосындысы

Бірнеше векторды қосу ережесі көпбұрыш ережесі деп аталады. Бұл ереже үшбұрыш ережесіне негізделген:



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$

6) Нөлдік вектор

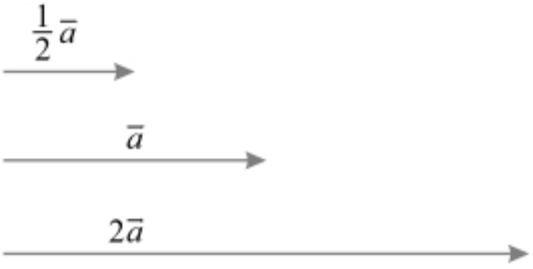
Басы мен ұшы бір нүктеде беттесетін вектор – нөлдік вектор деп аталады.
Нөлдік векторның бағыты болмайды және ұзындығы нөлге тең.
Нөлдік векторның белгіленуі:
$\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=...$

7) Векторды санға көбейту

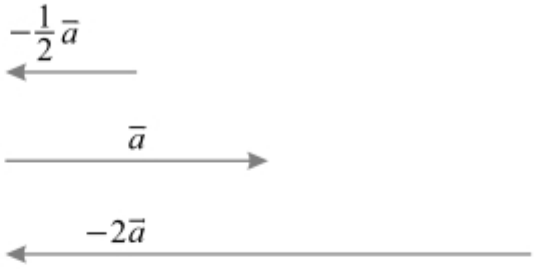
$\vec{a}$ векторын k санына көбейткен кезде, сол векторға коллинеар(параллель) болатын $k\cdot\vec{a}$ векторы шығады.

$$k\cdot\vec{a}(x;\ y)=\vec{b}(kx;\ ky)$$

1) Егер $k>0$ болса, онда $k\cdot\vec{a}$ мен $\vec{a}$ векторлары бағыттас векторлар болады:



2) Егер $k<0$ болса, онда $k\cdot\vec{a}$ мен $\vec{a}$ векторлары қарама-қарсы бағытталған векторлар болады:



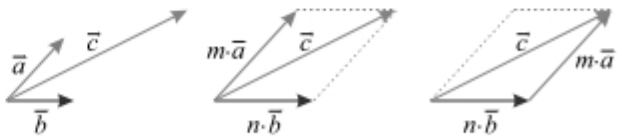
8) Коллинеар векторлар

Параллель түзулерде немесе бір түзудің бойында жататын векторлар коллинеар векторлар деп аталады.
Егер $\vec{a}(x_1;y_1)$ және $\vec{b}(x_2;y_2)$ векторлары коллинеар болса, онда олардың сәйкес координаталарының қатынасы тең болады:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

9) Жазықтықтағы бір векторды коллинеар емес екі вектор бойынша жіктеу

Жазықтықтағы $\vec{c}$ векторын коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына сәйкесінше коллинеар болатын екі вектор бойынша жіктеуге болады.



$$\vec{c}=m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}$$

Бұл жіктеудің бір ғана түрі бар

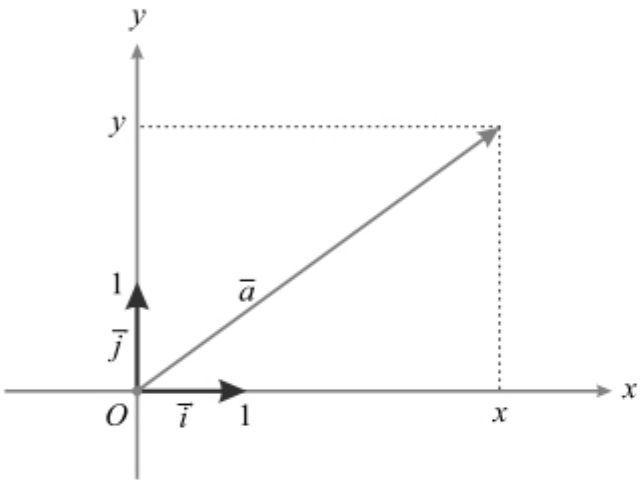
© «EduCon» басылымдары

10) Векторды координаталық векторлар бойынша жіктеу

Координаталық векторлар координата остерінде жатады. Координаталық векторлардың ұзындықтары 1-ге тең.

Ox осінде $\vec{i}(1;0)$ векторы жатады.

Oy осінде $\vec{j}(0;1)$ векторы жатады.



Кез келген $\vec{a}(x;y)$ векторын координаталық векторлар бойынша жіктеуге болады:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

Бұл жіктеудің бір ғана түрі бар

11) $\vec{a}(x_1;y_1)$ және $\vec{b}(x_2;y_2)$ векторларының скаляр көбейтіндісі

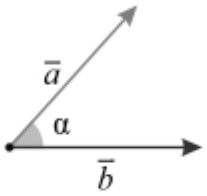
Координаталары арқылы берілген векторлардың скаляр көбейтіндісі олардың сәйкес координата-ларының көбейтіндісінің қосындысына тең:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп олардың ұзындықтарын осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенде шығатын санды айтады:

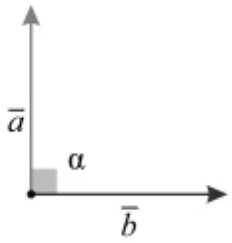
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

1) Егер векторлардың арасындағы бұрыш сүйір болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі оң сан болады:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

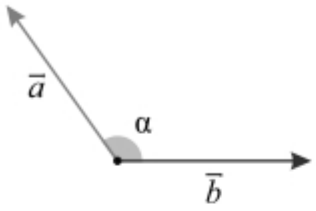
2) Егер векторлардың арасындағы бұрыш тік болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

© «EduCon» басылымдары

3) Егер векторлардың арасындағы бұрыш доғал болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі теріс сан болады:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$$

12) Екі вектордың арасындағы бұрыш

Бір нүктеден шыққан екі вектордың арасындағы бұрышты векторлар арсындағы бұрыш деп атайды.

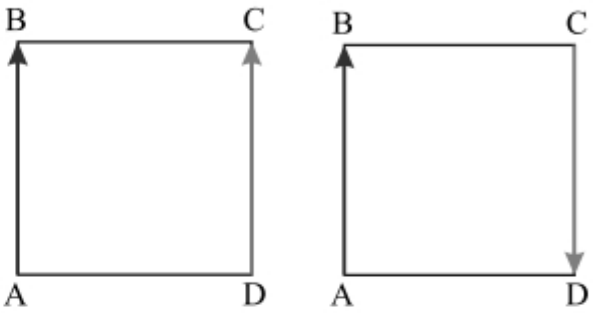
$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Бағыттас векторлардың арасындағы бұрыш 0°, ал қарама-қарсы бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 180°.

Егер екі вектордың арасындағы бұрыш 90° болса, онда олар перпендикуляр немесе ортогональ векторлар деп аталады.

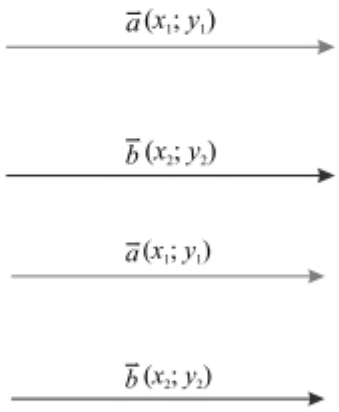
13) Тең векторлар

Нөлдік емес екі вектор бағыттас және ұзындықтары тең болса, онда оларды тең векторлар деп атайды.



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$$

Егер екі вектор тең болса, онда олардың сәйкес координаталары да тең болады:



$$\vec{a}(x_1;y_1)=\vec{b}(x_2;y_2)$$
$$x_1=x_2$$
$$y_1=y_2$$

© «EduCon» басылымдары

ҚОРЫТЫНДЫ:

Жазықтықтағы векторлар

1) Вектордың координаталары:
$\vec{a}(x;\ y)$

2) $A(x_1;\ y_1)$ және $B(x_2;\ y_2)$ нүктелері арқылы берілген вектордың координаталары:
$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$

3) Вектордың ұзындығы:
$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

4) Векторларды қосу және азайту:
$\vec{a}(x_1;\ y_1)+\vec{b}(x_2;\ y_2)=\vec{c}(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$
$\vec{a}(x_1;\ y_1)-\vec{b}(x_2;\ y_2)=\vec{c}(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$

5) Векторды санға көбейту:
$k\cdot\vec{a}(x;\ y)=\vec{b}(kx;\ ky)$

6) Егер $\vec{a}(x_1;y_1)$ және $\vec{b}(x_2;y_2)$ векторлары коллинеар векторлар болса, онда:
$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$

7) Векторды координаталық векторлар бойынша жіктеу:
$\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$

8) Векторлардың скаляр көбейтіндісі:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

9) Екі вектордың арасындағы бұрыш:
$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

© «EduCon» басылымдары

Кеңістіктегі векторлар

1) Вектордың координаталары:
$\vec{a}(x;\ y;\ z)$

2) $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелері арқылы берілген вектордың координаталары:
$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$

3) Вектордың ұзындығы:
$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4) Векторларды қосу және азайту:
$\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)+\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)=\vec{c}(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$
$\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)-\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)=\vec{c}(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2)$

5) Векторды санға көбейту:
$k\cdot\vec{a}(x;\ y;\ z)=\vec{b}(kx;\ ky;\ kz)$

6) Егер $\vec{a}(x_1;y_1;\ z_1)$ және $\vec{b}(x_2;y_2;\ z_2)$ векторлары коллинеар векторлар болса, онда:
$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$

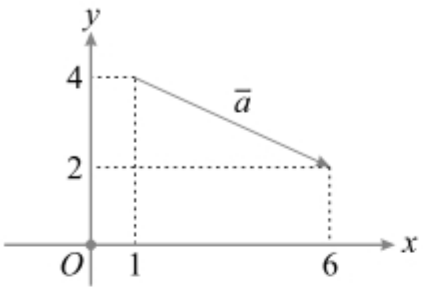
7) Векторды координаталық векторлар бойынша жіктеу:
$\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$

8) Векторлардың скаляр көбейтіндісі:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

9) Екі вектордың арасындағы бұрыш:
$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

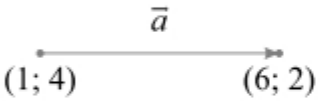
Мысал 1

$\vec{a}$ векторының координаталарын табыңыз.



Шешімі:

Вектордың координаталарын табу үшін вектордың ұшының координаталарынан басының сәйкес координаталарын азайтамыз:



$$\vec{a}(6-1;\ 2-4)$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{a}(5;-2)$$

Жауабы: $\vec{a}(5;-2)$.

Мысал 2

Егер $\vec{a}(-3;k)$ және $\vec{b}(k+2;-8)$ векторлары коллинеар болса, онда k-ның мәнін табыңыз.

Шешімі:

Егер екі вектор коллинеар болса, онда олардың сәйкес координаталарының қатынасы тең болады:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{k+2}=\frac{k}{-8}$$

$$k^2+2k=24$$

$$k^2+2k-24=0$$

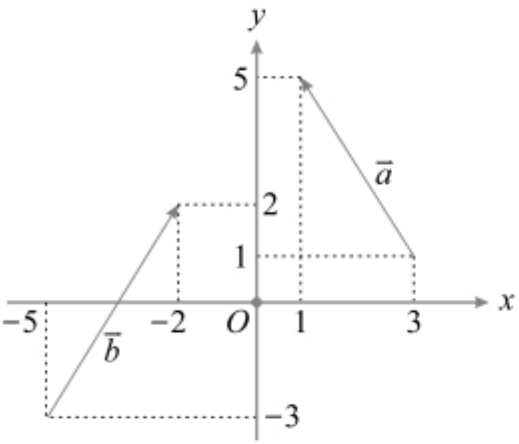
$$k=-6 \qquad k=4$$

Жауабы: $-6;\ 4$.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ өрнегінің мәнін табыңыз.



Шешімі:

Векторлардың координаталарын табайық:

$\vec{a}$: (3; 1) → (1; 5)

$\vec{b}$: (−5;−3) → (−2; 2)

$\vec{a}(1-3;\ 5-1)$

$\Downarrow$

$\vec{a}(-2;\ 4)$

$\vec{b}(-2+5;\ 2+3)$

$\Downarrow$

$\vec{b}(3;\ 5)$

$\vec{a}(-2;\ 4)+\vec{b}(3;\ 5)=\vec{c}(1;9)$

Демек, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\sqrt{1^2+9^2}=\sqrt{82}$

Жауабы: $\sqrt{82}$.

Мысал 4

$\vec{c}(14;11)$ векторын коллинеар емес $\vec{a}(2;5)$ және $\vec{b}(4;-2)$ векторлары арқылы жіктеңіз.

Шешімі:

$\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$, демек $m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}=\vec{c}$.

$\Downarrow$

$\vec{a}_1(2m;\ 5m)+\vec{b}_1(4n;\ -2n)=\vec{c}(14;11)$

$$\begin{cases}2m+4n=14\\5m-2n=11\end{cases}\ \Big|\cdot 2\ \Rightarrow\ +\begin{cases}2m+4n=14\\10m-4n=22\end{cases}$$

$12m=36$

$m=3$

Демек, $2\cdot 3+4n=14$

$4n=8$

$n=2$

Жауабы: $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 5

Егер $\vec{a}=-5\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ және $\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$ болса, онда $\vec{a}+\vec{b}$ векторының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ векторының координаталарын табайық:

$$+\begin{cases}\vec{a}=-5\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\\ \vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}\end{cases}$$
$$\vec{c}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$$

$\Downarrow$

$\vec{c}(2;-4;1)$

Демек, $|\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}$

Жауабы: $\sqrt{21}$.

Мысал 6

n-нің қандай мәндерінде $\vec{a}(-6;8)$ және $\vec{b}(n;15)$ векторларының арасындағы бұрыш доғал болады?

Шешімі:

Егер векторлардың арасындағы бұрыш доғал болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі теріс сан болады:

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$

$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2<0$

$-6n+120<0$

$-6n<-120$

$n>20$

Жауабы: $(20;+\infty)$.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 7

Егер $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=4\sqrt{17}$ және $|\vec{a}+\vec{b}|=26$ болса, онда $|\vec{a}-\vec{b}|$ өрнегінің мәнін табыңыз.

Шешімі:

$|\vec{a}-\vec{b}|=x$, онда x-тің мәнін табу керек.

Теңдеулер жүйесін құрып, екі теңдеудің де екі жағын квадраттаймыз:

$$\begin{cases} |\vec{a}+\vec{b}|^2=26^2 \\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=x^2 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} |\vec{a}|^2+2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2=676 \\ |\vec{a}|^2-2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2 \end{cases}$$

$$2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=676+x^2$$

$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$

$$2\cdot 100+2\cdot 272=676+x^2$$

$$744=676+x^2$$

$$x^2=68$$

$$x=2\sqrt{17}$$

Жауабы: $2\sqrt{17}$.

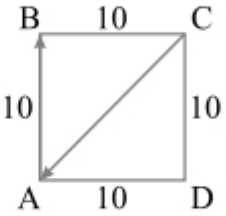
Мысал 8

Қабырғасы 10 см болатын ABCD квадраты берілген. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ өрнегінің мәнін табыңыз.

Шешімі:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\alpha$

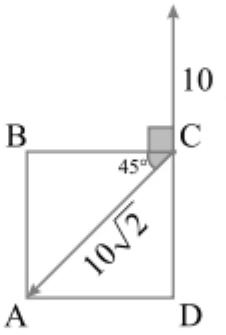
$\overrightarrow{CA}$ векторының ұзындығын табайық.



$\overrightarrow{CA}$ векторы квадраттың диагоналі болып келеді.

Демек, $|\overrightarrow{CA}|=a\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

Векторлардың басы бір нүктеде болуы үшін екі вектордың біреуін параллель жылжытамыз:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\alpha$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=10\cdot 10\sqrt{2}\cdot\cos 135°$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=100\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-100$

Жауабы: –100.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Егер A(15;–7) және B(–8; –4) болса, онда $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыңыз.

2. A(–8;10), B(5;–2) және C(14;–9) нүктелері берілген. Егер $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ болса, онда D нүктесінің координаталарын табыңыз.

3. Егер $\vec{a}(7;-3)$, $\vec{b}(-1;-6)$ және $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$ болса, онда $\vec{c}$ векторының координаталарын табыңыз.

4. Егер $|\vec{a}|=6\sqrt{3}$ және $|\vec{b}|=8$ болса, онда араларындағы бұрыш 30° болатын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңыз.

5. Векторлардың қосындысын табыңыз:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}$

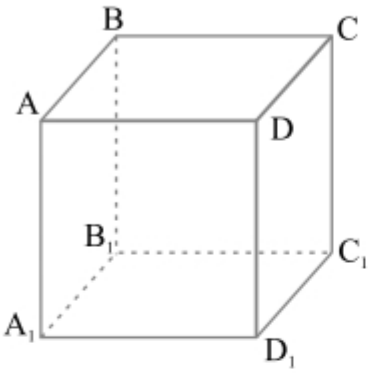
6. $\vec{m}(3;4)$ және $\vec{n}(10;0)$ векторлары параллелограмның қабырғаларын құрайды. Параллелограмның периметрін табыңыз.

7. Егр $\vec{a}=(-3\vec{p}+7\vec{c})-(-6\vec{p}+5\vec{c})$ және $\vec{p}(-2;2)$, $\vec{c}(3;-2)$ болса, онда $\vec{a}$ векторының ұзындығын табыңыз.

8. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш 45°. Егер $\vec{a}\cdot\vec{b}=16\sqrt{2}$ болса, онда осы векторлардан құралған параллелограмның ауданын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{A_1B}$ және $\overrightarrow{C_1A_1}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңыз.

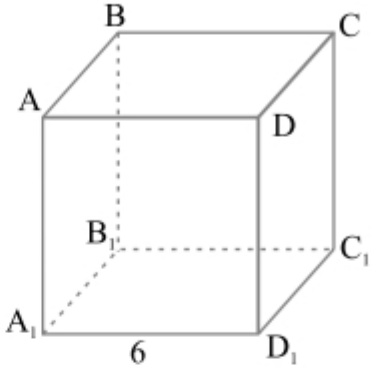


10. $\vec{a}(-5;3)$ және $\vec{b}(2;8)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңыз.

11. $\vec{a}(-3;4)$ және $\vec{b}(2;1)$ векторларының арасындағы бұрыштың синусын табыңыз.

12. n -нің қандай мәндерінде $\vec{a}(-4;-5)$ және $\vec{b}(5;n)$ векторларының арасындағы бұрыш сүйір болады?

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1C}$ өрнегінің мәнін табыңыз.



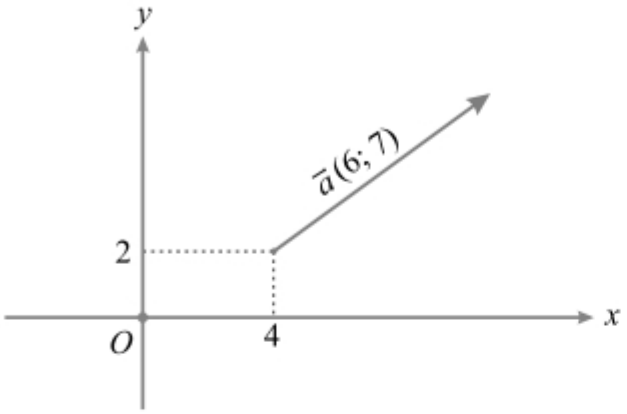
14. m-нің қандай мәнінде $\vec{a}(32;16;m)$ және $\vec{b}(-8;m;1)$ векторлары коллинеар болады?

15. $\vec{c}(24;5)$ векторын екі коллинеар емес $\vec{a}(4;3)$ және $\vec{b}(2;-5)$ векторлары арқылы жіктеңіз.

16. Егер $\vec{a} = -6\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ және $\vec{b} = 17\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{k}$ болса, онда $\vec{a} + \vec{b}$ векторының координаталарын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

17. $\vec{a}$ векторының ұшының координаталарын табыңыз.

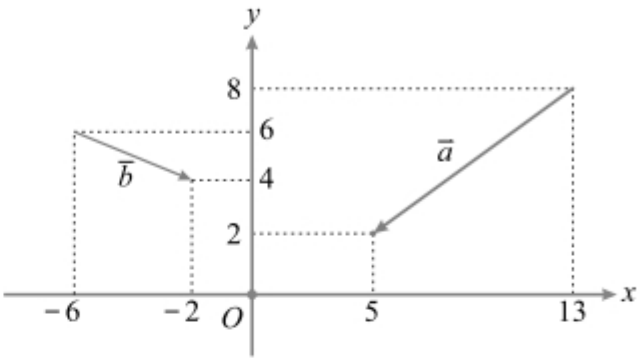


18. $\vec{a}(4;-2)$, $\vec{b}(4;2)$ және $\vec{c}(5;m)$ векторлары берілген. m -нің қандай мәндерінде $\vec{a}$ және $3\vec{b}-2\vec{c}$ векторлары перпендикуляр болады?

19. Төбелері A(–2;5), B(1;9) және C(2;8) нүктелері болатын ABC үшбұрышының ең үлкен бұрышының косинусын табыңыз.

20. Қабырғасы 8 см болатын теңқабырғалы ABC үшбұрышы берілген. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ өрнегінің мәнін табыңыз.

21. $\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|$ өрнегінің мәнін табыңыз.



22. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш 60°. Егер $\left|\vec{a}\right|=3$ және $\left|\vec{b}\right|=4$ болса, онда $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ өрнегінің мәнін табыңыз.

23. Егер $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=6$ және $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2\sqrt{7}$ болса, онда $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ өрнегінің мәнін табыңыз.

24. Егер $\left|\vec{b}\right|=8$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4\sqrt{3}$ және $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=4\sqrt{7}$ болса, онда $\left|\vec{a}\right|$ өрнегінің мәнін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №11

1. $\vec{a}(6;2)$ және $\vec{b}(3;-9)$ векторларының арасындағы бұрышты табыңыз.
   A) 30°
   B) 0°
   C) 60°
   D) 90°
   E) 45°

2. PABCD төртбұрышты пирамидасының барлық қырлары тең. Өрнекті ықшамдаңыз: $\left(\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{PA}\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BA}\right)$.
   A) –2
   B) 1
   C) 2
   D) 0
   E) –1

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{D_1B_1}+\overrightarrow{BC}$ өрнегінің мәнін табыңыз.
   A) $\overrightarrow{DC}$
   B) $\overrightarrow{C_1D}$
   C) $\overrightarrow{A_1D}$
   D) $\overrightarrow{D_1C}$
   E) $\overrightarrow{D_1C_1}$
   F) $\overrightarrow{A_1B}$
   G) $\overrightarrow{B_1C}$
   H) $\overrightarrow{AB_1}$

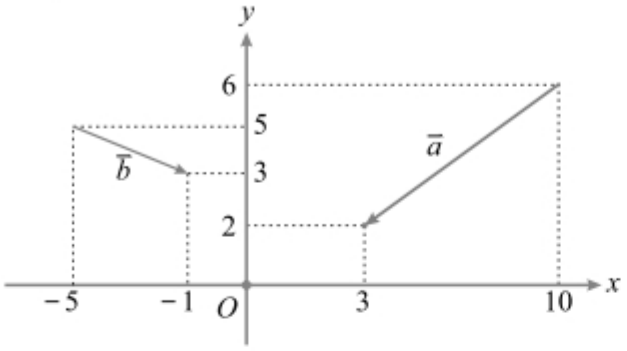
4. $\vec{a}(3;-5;4)$ векторын координаталық векторлар арқылы жіктеңіз.
   A) $\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$
   B) $\vec{a}=-3\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$
   C) $\vec{a}=-3\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$
   D) $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$
   E) $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$

5. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш 60°. Егер $\vec{a}\cdot\vec{b}=24$ болса, онда осы векторлардан құралған параллелограмның ауданын табыңыз.
   A) $12\sqrt{3}$
   B) 24
   C) $24\sqrt{3}$
   D) 12
   E) $8\sqrt{3}$

6. k -ның қандай мәндерінде $\vec{a}(k;9)$ және $\vec{b}(4;k)$ векторлары параллель болады?
   A) 6
   B) 4
   C) –2
   D) 3
   E) –6
   F) 2
   G) –3
   H) –4

© «EduCon» басылымдары

7. $3\vec{a}-2\vec{b}$ векторының координаталарын табыңыз.



A) (–29; –8)
B) (26; –6)
C) (–8; 23)
D) (–22; –6)
E) (26; 21)

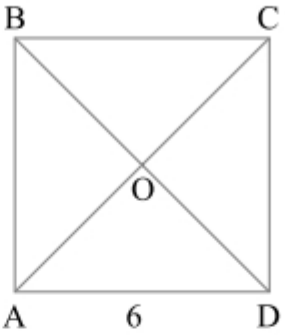
8. Егер $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ және $|\vec{a}-\vec{b}|=30$ болса, онда $|\vec{a}+\vec{b}|$ өрнегінің мәнін табыңыз.

A) 18
B) 24
C) 22
D) 20
E) 16

9. Қабырғасы a болатын ABCD ромбының AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысады. Егер $\angle A=120^\circ$ болса, онда $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}$ өрнегінің мәнін табыңыз.

A) $0{,}5a^2$
B) $\frac{3a^2}{4}$
C) $3a^2$
D) $\frac{4a^2}{3}$
E) $\frac{a^2}{4}$

10. ABCD – шаршы. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DO}$ өрнегінің мәнін табыңыз.



A) 18
B) –16
C) 10
D) –18
E) 6

11. n-нің қандай мәнінде $\vec{a}(4;-6)$ және $\vec{b}(n;6)$ векторлары өзара перпендикуляр болады?

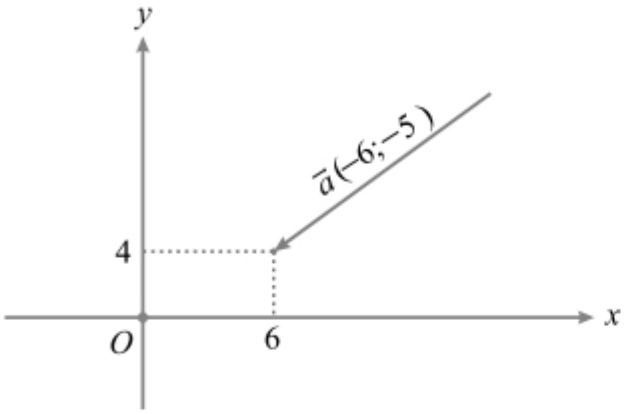
A) –9
B) 6
C) –8
D) 9
E) 12

12. ABC үшбұрышында AN және BM медианалары O нүктесінде қиылысады. Егер $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ және $\overrightarrow{OA}=\vec{b}$ болса, онда $\overrightarrow{BA}$ векторын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңіз.

A) $2\vec{a}+\vec{b}$
B) $\vec{a}+2\vec{b}$
C) $-\vec{a}+3\vec{b}$
D) $4\vec{a}+2\vec{b}$
E) $2\vec{a}-\vec{b}$

© «EduCon» басылымдары

13. $\vec{a}$ векторының басының координаталарын табыңыз.



A) (–12; –9)
B) (4; –12)
C) (–9; 5)
D) (12; 9)
E) (12; 6)

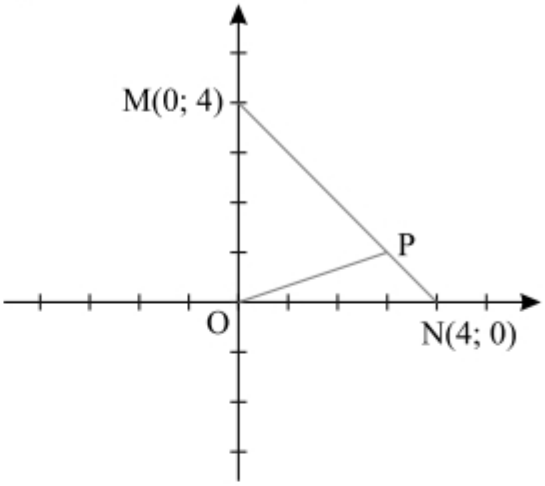
14. $\vec{c}(6;4)$ векторын коллинеар емес $\vec{a}(-2;4)$ және $\vec{b}(3;-2)$ векторлары арқылы жіктеңіз.

A) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$
B) $\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}$
C) $\vec{c}=4\vec{a}-3\vec{b}$
D) $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$
E) $\vec{c}=4\vec{a}+3\vec{b}$

15. Егер A(–8;4) және B(3; –2) болса, онда $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыңыз.

A) (–6; 11)
B) (11; 6)
C) (–11; 6)
D) (5; –6)
E) (11; –6)

16. Егер $|MP|=3\cdot|PN|$ болса, онда $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{OP}$ өрнегінің мәнін табыңыз.



A) 3
B) –6
C) 4
D) 6
E) –9

17. Егер $A(3;-2)$, $B(5;1)$, $C(-2;3)$ және $D(1;2)$ болса, онда $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңыз.

A) 6
B) 4
C) 3
D) 8
E) 9

18. Егер $|\vec{a}-\vec{b}|=12$, $|\vec{a}+\vec{b}|=14$ және $|\vec{b}|=7$ болса, онда $|\vec{a}|$ өрнегінің мәнін табыңыз.

A) 10
B) 13
C) 12
D) 11
E) 14

© «EduCon» басылымдары

Перпендикуляр және көлбеу

Жазықтықтан тыс жатқан нүктеден жазықтыққа жүргізілген **перпендикуляр** деп, жазықтықпен тік бұрыш жасайтын кесіндіні айтады.

Жазықтықтан тыс жатқан нүктеден жазықтыққа жүргізілген **көлбеу** деп, жазықтықпен перпендикуляр емес кесіндіні айтады.

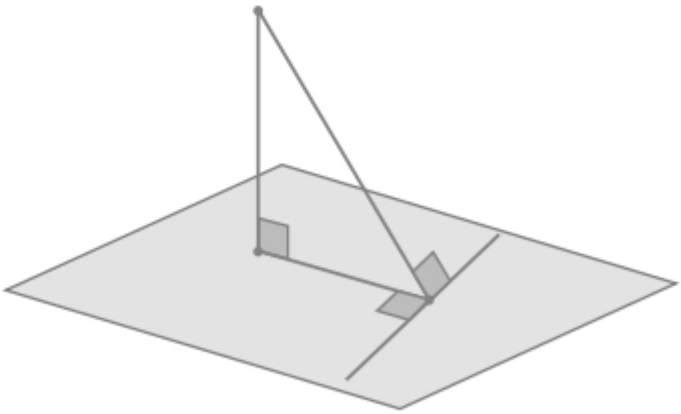
Бір нүктеден жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің табандарын жалғайтын кесіндіні **көлбеудің проекциясы** деп атайды.

Егер жазықтықтан тыс жатқан бір нүктеден сол жазықтыққа перпендикуляр мен көлбеулер жүргізілсе, онда:

1) проекциялары тең болатын көлбеулер де тең болады;
2) тең көлбеулердің проекциялары да тең болады;
3) проекциясы ұзын болатын көлбеу де ұзын болады;
4) ұзын көлбеуге ұзын проекция сәйкес келеді.

Үш перпендикуляр туралы теорема

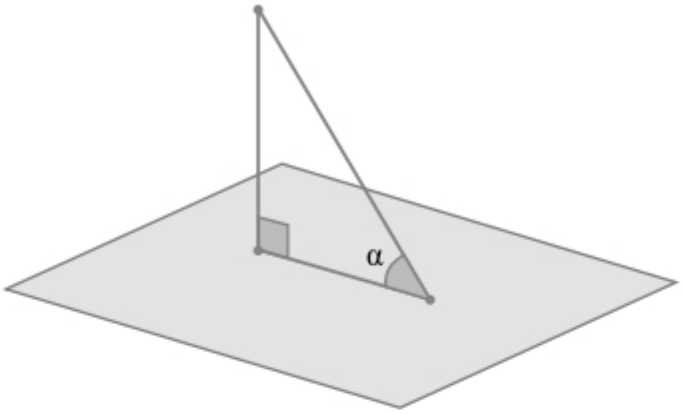
Жазықтықта көлбеудің табаны арқылы оның проекциясына перпендикуляр етіп жүргізілген түзу сол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады. Керісіншесі де дұрыс.



© «EduCon» басылымдары

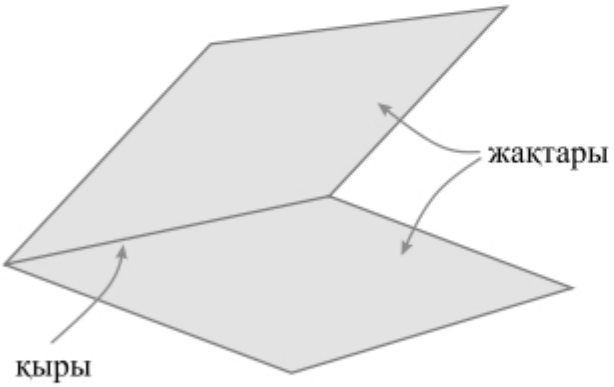
Көлбеу мен жазықтық арасындағы бұрыш

Көлбеу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп, көлбеу мен оның проекциясының арасындағы бұрышты айтады.



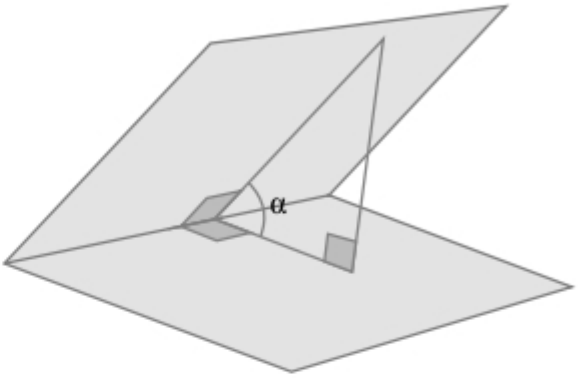
Екіжақты бұрыш

Бір түзумен шектелген екі жарты жазықтықтан құралған фигураны екіжақты бұрыш деп атайды.



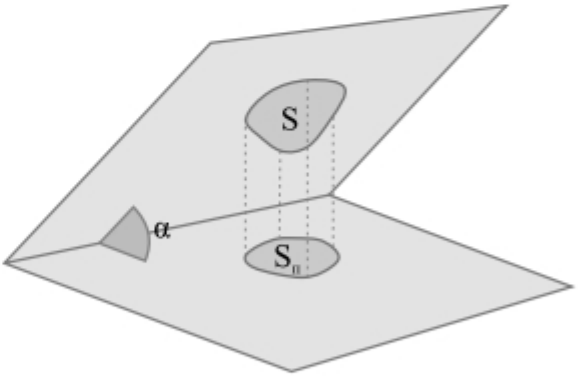
Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы

Екіжақты бұрыштың жақтарынан қырына түсірілген перпендикулярлар арасындағы бұрышты сызықтық бұрыш деп атайды.



© «EduCon» басылымдары

Жазық фигураның ортогональді проекциясының ауданын табу үшін проекцияланушы фигураның ауданын жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейту керек:

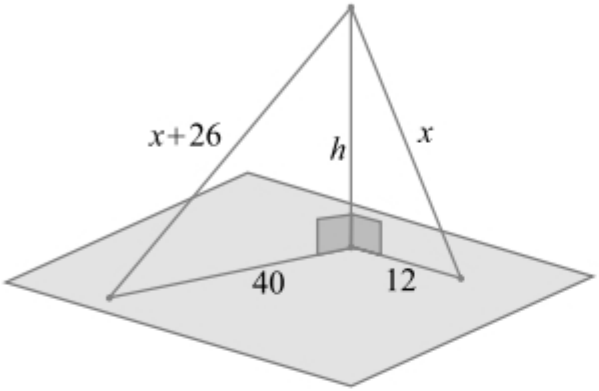


$$S_п = S \cdot \cos\alpha$$

Мысал 1

Бір нүктеден жазықтыққа жүргізілген екі көлбеудің проекциялары 12 см және 40 см. Егер көлбеудің біреуі екіншісінен 26 см артық болса, онда көлбеулердің ұзындықтарын табыңыз.

Шешімі:



Пифагор теоремасы бойынша:

$$\begin{cases} h^2+12^2=x^2 \\ h^2+40^2=(x+26)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2-x^2=-144 \\ h^2-x^2=52x-924 \end{cases}$$

$$52x-924=-144$$

$$52x=780$$

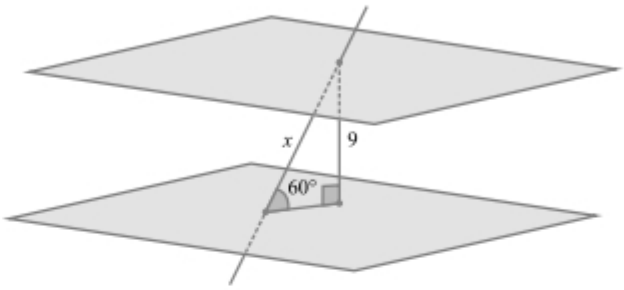
$$x=15$$

Жауабы: 15 см; 41 см.

Мысал 2

Бір түзу арақашықтығы 9 метр болатын екі параллель жазықтықты 60°-тық бұрышпен қияды. Түзудің екі жазықтықпен шектелген бөлігінің ұзындығын табыңыз.

Шешімі:



$$\sin 60^\circ=\frac{9}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{x}$$

$$x\sqrt{3}=18$$

$$x=6\sqrt{3}$$

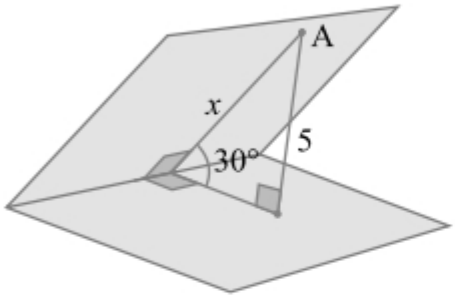
Жауабы: $6\sqrt{3}$ м.

© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

А нүктесі екіжақты бұрыштың бір жағында орналасқан және сол нүктеден екінші жағына дейінгі қашықтық 5 см. Егер екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы 30° болса, онда А нүктесінен екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтықты табыңыз.

Шешімі:



$$\sin 30° = \frac{5}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{x}$$

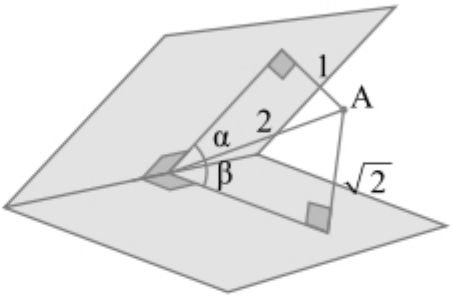
$$x = 10$$

Жауабы: 10 см.

Мысал 4

А нүктесі екіжақты бұрыштың ішінде орналасқан. Осы нүктеден жақтарына дейінгі қашықтық 1 см және $\sqrt{2}$ см, ал екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтық 2 см. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын табыңыз.

Шешімі:



$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 30°$$

$$\beta = 45°$$

Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы осы екі бұрыштың қосындысына тең болады:

$$\alpha + \beta = 30° + 45° = 75°$$

Жауабы: 75°.

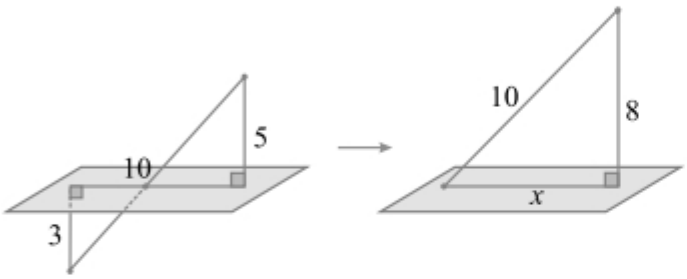
© «EduCon» басылымдары

Мысал 5

Ұзындығы 10 см болатын кесінді жазықтықты қиып өтеді. Егер кесіндінің ұштары жазықтықтан 3 см және 5 см қашықтықта жатса, онда кесіндінің проекциясының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

Кесіндіні 3 см жоғары жылжытамыз:



Пифагор теоремасы бойынша:

$x^2 + 8^2 = 10^2$

$x^2 = 36$

$x = 6$

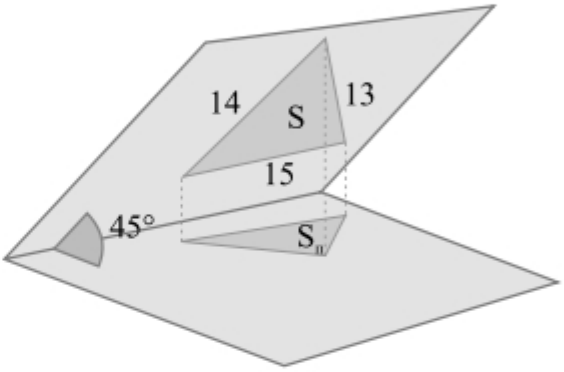
Жауабы: 6 см.

Мысал 6

Қабырғалары 13 см, 14 см және 15 см болатын үшбұрыш жазықтықпен 45°-тық бұрыш жасайды. Осы үшбұрыштың жазықтыққа перпендикуляр проекциясының ауданын табыңыз.

Шешімі:

Герон формуласы бойынша үшбұрыштың ауданын табамыз:



$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$

$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$

$S = 84$

Онда, $S_п = S \cdot \cos\alpha$

$S_п = 84 \cdot \cos 45° = 84 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}$

Жауабы: $42\sqrt{2}$ см.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Бір нүктеден жазықтыққа ұзындығы 9 см болатын перпендикуляр мен көлбеу жүргізілді. Егер олардың арасындағы бұрыш 30° болса, онда көлбеудің ұзындығын табыңыз.

2. Бір нүктеден жазықтыққа жүргізілген екі көлбеудің проекциялары 15 см және 6 см. Егер көлбеудің біреуі екіншісінен 7 см артық болса, онда көлбеулердің ұзындықтарын табыңыз.

3. ABCD квадратының қабырғасы 12 см. S нүктесі квадрат жазықтығынан тыс және квадраттың төбелерінен бірдей $6\sqrt{5}$ см қашықтықта орналасқан. DCS және ABCD жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңыз.

4. Ауданы 12 см^2 болатын үшбұрыштың жазықтыққа перпендикуляр проекциясы қабырғалары 7 см, 8 см және 3 см болатын үшбұрыш. Осы үшбұрыш жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңыз.

5. Бір нүктеден түзуге ұзындықтары 13 см және 15 см болатын екі көлбеу жүргізілді. Егер проекцияларының айырмасы 4 см болса, онда сол нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты табыңыз.

6. ABCD және ABC_1D_1 шаршылары араларындағы бұрыш 30° болатын екі жазықтықта орналасқан. Егер $AB = 8$ см болса, онда шаршылардың центрлерінің арақашықтығын табыңыз.

7. ABC үшбұрышында C бұрышы тік және $AB = 4$ см, $\angle A = 30°$. Үшбұрыш жазықтығына M нүктесінен ұзындығы $\sqrt{22}$ см болатын MC перпендикуляры жүргізілді. M нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтықты табыңыз.

8. Қабырғалары 13 см, 14 см және 15 см болатын үшбұрыш жазықтықпен 45°-тық бұрыш жасайды. Осы үшбұрыштың жазықтыққа перпендикуляр проекциясының ауданын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

9. ABCD ромб жазықтығына ұзындығы 4 см болатын MC перпендикуляры жүргізілді. Егер $\angle A = 30^\circ$ және $AB = 6$ см болса, онда M нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтықты табыңыз.

10. C бұрышы тік болатын тең бүйірлі ABC үшбұрышының гипотенузасы 8 см. CM кесіндісі үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр. Егер M нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтық 5 см болса, онда CM кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

11. Бір түзу арақашықтығы 8 метр болатын екі параллель жазықтықты 45°-тық бұрышпен қияды. Түзудің екі жазықтықпен шектелген бөлігінің ұзындығын табыңыз.

12. AB кесіндісі альфа жазықтығынан тыс жатыр. AB кесіндісінің ұштарынан және кесіндінің ортасы болатын C нүктесінен альфа жазықтығын сәйкесінше A_1, B_1 және C_1 нүктелерінде қиып өтетін параллель түзулер жүргізілді. Егер AA_1=12 см және CC_1=18 см болса, онда BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

13. Проекциясының ұзындығы 5 см болатын кесінді жазықтықты қиып өтеді. Егер кесіндінің ұштары жазықтықтан 4 см және 8 см қашықтықта жатса, онда кесіндінің ұзындығын табыңыз.

14. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы 30°. Екіжақты бұрыштың бір жағында орналасқан A нүктесінен екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтық 18 см. Осы нүктеден екіжақты бұрыштың екінші жағына дейінгі қашықтықты табыңыз.

15. M нүктесі сызықтық бұрышы 60° болатын екіжақты бұрыштың ішінде орналасқан. Осы нүктеден жақтарына дейінгі қашықтық 3 см және 5 см. M нүктесінен екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтықты табыңыз.

16. P нүктесі екіжақты бұрыштың ішінде орналасқан. Осы нүктеден жақтарына дейінгі қашықтық 3 см және $3\sqrt{3}$ см, ал екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтық 6 см. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №12

1. Ұзындығы 17 см болатын кесінді жазықтықты қиып өтеді. Егер кесіндінің ұштары жазықтықтан 8 см және 7 см қашықтықта жатса, онда кесіндінің проекциясының ұзындығын табыңыз.
   A) 5 см
   B) 7 см
   C) 8 см
   D) 10 см
   E) 6 см

2. Жазықтықты қиып өтетін кесіндінің проекциясының ұзындығы 9 см. Егер кесіндінің ұштары жазықтықтан 4 см және 8 см қашықтықта жатса, онда кесіндінің ұзындығын табыңыз.
   A) 15 см
   B) 17 см
   C) 18 см
   D) 14 см
   E) 16 см

3. Бір нүктеден жазықтыққа ұзындығы 18 см болатын перпендикуляр мен көлбеу жүргізілді. Егер олардың арасындағы бұрыш 60° болса, онда көлбеудің ұзындығын табыңыз.
   A) $6\sqrt{3}$ см
   B) 18 см
   C) 36 см
   D) $18\sqrt{3}$ см
   E) $36\sqrt{3}$ см

4. Жазықтықтан тыс жататын AB кесіндісінің ұштары жазықтықтан 8 см және 18 см қашықтықта орналасқан. AB кесіндісін қақ бөлетін нүкте жазықтықтан қандай қашықтықта орналасқанын табыңыз.
   A) 10 см
   B) 5 см
   C) 15 см
   D) 13 см
   E) 17 см

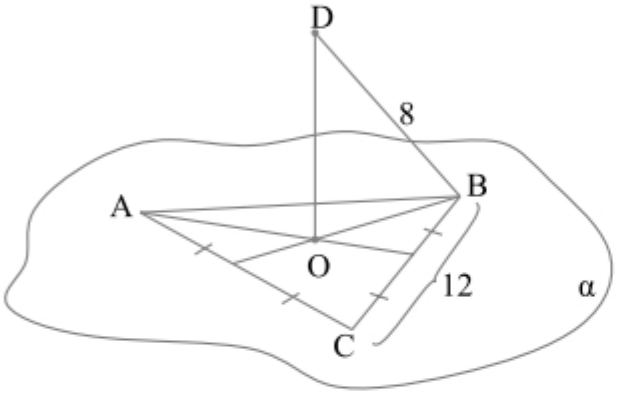
5. NA кесіндісі ABCD шаршысының жазықтығына түсірілген перпендикуляр. Егер BC=6 см, ND=10 см болса, онда N нүктесінен CD және AD түзулеріне дейінгі қашықтықты табыңыз.
   A) 6 см; $2\sqrt{34}$ см
   B) 8 см; 6 см
   C) 10 см; 8 см
   D) 10 см; 6 см
   E) 8 см; $2\sqrt{41}$ см

6. Жазықтықтан тыс жататын MN кесіндісінің ұштарынан жазықтыққа ұзындықтары 6 см және 9 см болатын перпендикулярлар жүргізілді. Егер олардың табандарының арақашықтығы 4 см болса, онда MN кесіндісінің ұзындығын табыңыз.
   A) 4 см
   B) 5 см
   C) 6 см
   D) 7 см
   E) 8 см

© «EduCon» басылымдары

7. Қабырғалары 3 см, 4 см және 5 см болатын үшбұрыш жазықтықпен 60°-тық бұрыш жасайды. Осы үшбұрыштың жазықтыққа перпендикуляр проекциясының ауданын табыңыз.
   A) 6 см^2
   B) 24 см^2
   C) 4 см^2
   D) 3 см^2
   E) 8 см^2

8. $DO \perp (ABC)$. ABC – дұрыс үшбұрыш. OD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



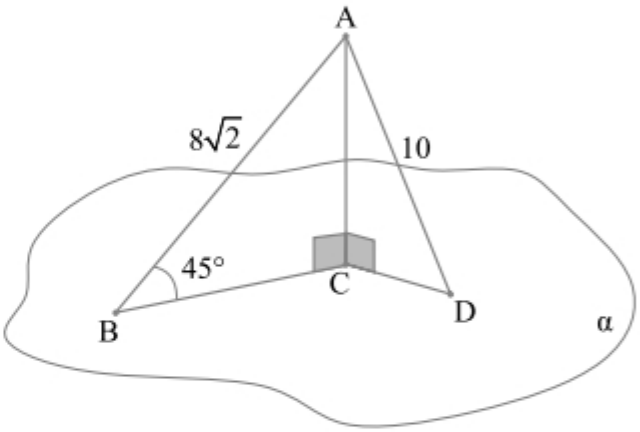
   A) 5
   B) 6
   C) 4
   D) 3
   E) 2

9. Тікбұрышты ABC үшбұрышының C төбесі арқылы гипотенузасынан 2 см қашықтықта және оған параллель болатын жазықтық жүргізілді. Катеттерінің осы жазықтыққа проекциялары $\sqrt{6}$ см және $\sqrt{2}$ см.

   Үшбұрыштың гипотенузасын табыңыз.
   A) 3 см
   B) 4 см
   C) 5 см
   D) 6 см
   E) 7 см

10. Бір түзу арақашықтығы 12 метр болатын екі параллель жазықтықты 30°-тық бұрышпен қияды. Түзудің екі жазықтықпен шектелген бөлігінің ұзындығын табыңыз.
   A) 6 м
   B) 12 м
   C) 18 м
   D) 24 м
   E) 15 м

11. $AC \perp \alpha$. CD кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

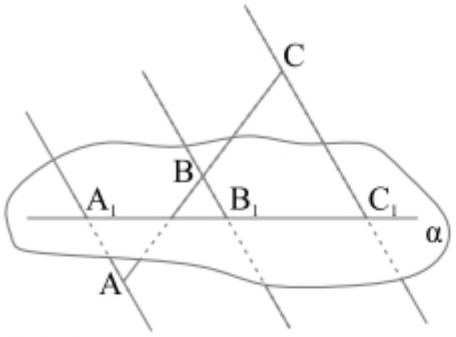


   A) 6
   B) 8
   C) 5
   D) 4
   E) 12

12. Бір нүктеден жазықтыққа ұзындығы 24 см болатын перпендикуляр мен көлбеу жүргізілді. Егер олардың арасындағы бұрыш 30° болса, онда көлбеудің проекциясының ұзындығын табыңыз.
   A) $12\sqrt{3}$ см
   B) $8\sqrt{3}$ см
   C) 12 см
   D) $6\sqrt{2}$ см
   E) $9\sqrt{3}$ см

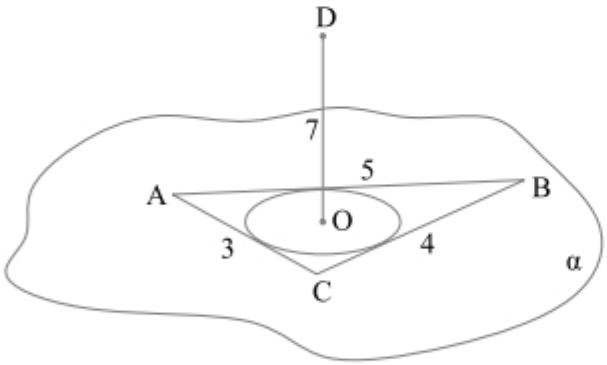
© «EduCon» басылымдары

13. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AB = BC$.
$AA_1 = 6$, $CC_1 = 14$. BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



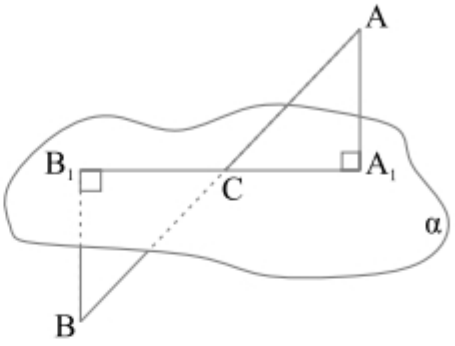
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

14. $DO \perp (ABC)$. Суреттегі берілгендерге қарап, дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.



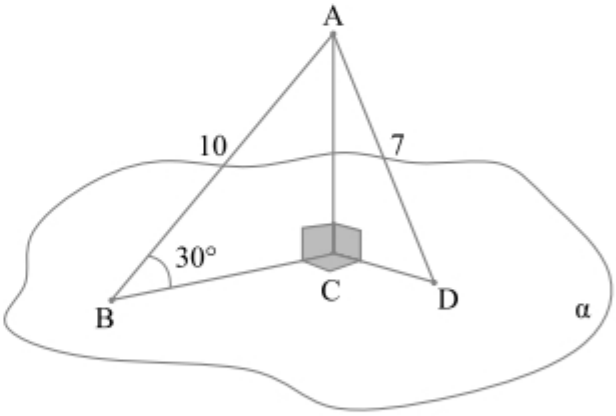
A) $r = 1{,}5$
B) $AD = \sqrt{51}$
C) $S_{BCD} = 10\sqrt{2}$
D) $r = 2$
E) $BD = \sqrt{59}$
F) $S_{ACD} = 15\sqrt{2}$
G) $CD = \sqrt{54}$
H) $S_{ABD} = 25\sqrt{2}$

15. $B_1A_1 = 15$, $AB = 17$, $AA_1 = 3$.
BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңыз.



A) 9
B) 6
C) 7
D) 5
E) 4

16. $AC \perp \alpha$, $BC \perp CD$. Суреттегі берілгендерге қарап, дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз



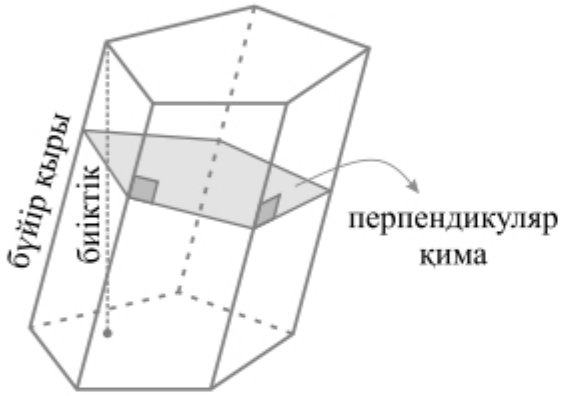
A) $CD = 2\sqrt{6}$
B) $BC = 5\sqrt{2}$
C) $BD = \sqrt{51}$
D) $AC = 5\sqrt{3}$
E) $BC = 5$
F) $AC = 5$
G) $CD = 4$
H) $BD = 3\sqrt{11}$

© «EduCon» басылымдары

ПРИЗМА

Екі жағы (табандары) параллель жазықтықтарда жататын өзара тең көпбұрыштар, ал қалған бүйір жақтары параллелограмдар болып келетін көпжақ **призма** деп аталады.

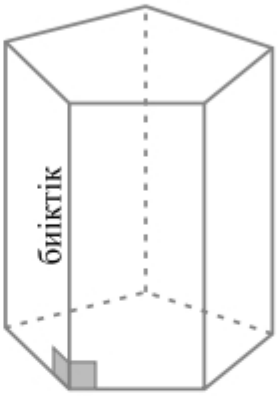
1) Көлбеу призма



Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.}=P_{п.қима}\cdot l$
Толық бетінің ауданы: $S_{т.б.}=S_{б.б}+2\cdot S_{таб.}$
Көлемі: $V=S_{таб.}\cdot H$ немесе $V=S_{п.қима}\cdot l$

2) Тік призма

Бүйір қырлары табанына перпендикуляр болатын призма **тік призма** деп аталады.

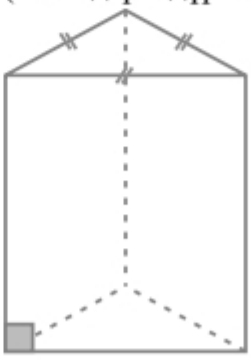


Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.}=P_{таб}\cdot H$
Толық бетінің ауданы: $S_{т.б.}=S_{б.б}+2\cdot S_{таб.}$
Көлемі: $V=S_{таб.}\cdot H$

3) Дұрыс призма

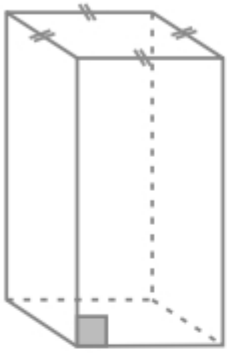
Табандары дұрыс көпбұрыш болатын тік призма **дұрыс призма** деп аталады.

Дұрыс үшбұрышты призма
(табандары дұрыс үшбұрыш)

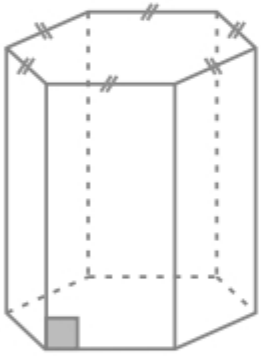


© «EduCon» басылымдары

Дұрыс төртбұрышты призма (табандары квадрат)

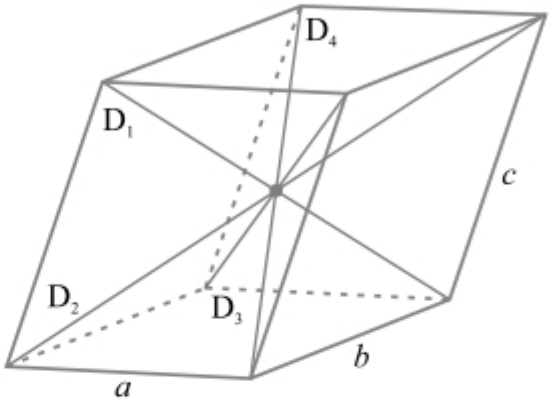


Дұрыс алтыбұрышты призма (табандары дұрыс алтыбұрыш)



ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Барлық жақтары параллелограмдар болатын призма **параллелепипед** деп аталады.



Қарама-қарсы жақтары тең және параллель.

Барлық төрт диагональ бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесімен қақ бөлінеді.

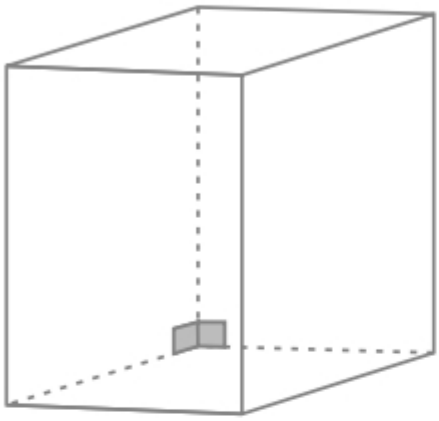
Диагональдарының квадраттарының қосындысы барлық қырларының квадраттарының қосындысына тең:

$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 = 4 \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

© «EduCon» басылымдары

1) Тік параллелепипед

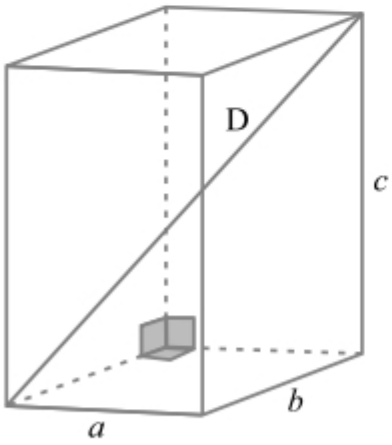
Бүйір қырлары табанына перпендикуляр болатын параллелепипед **тік параллелепипед** деп аталады.



Бүйір жақтары – тік төртбұрыштар, ал табандары – параллелограмдар.

2) Тікбұрышты параллелепипед

Табандары тіктөртбұрыш болатын тік параллелепипед **тікбұрышты параллелепипед** деп аталады.



$$S_{т.б.} = 2 \cdot (ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$

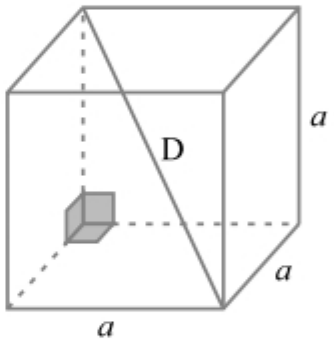
Барлық жақтары – тік төртбұрыштар. Барлық диагональдары тең.

Диагональдың квадраты бір төбеден шығатын барлық қырларының квадраттарының қосындысына тең:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

3) Куб

Барлық жақтары квадрат болатын параллелепипед **куб** деп аталады.



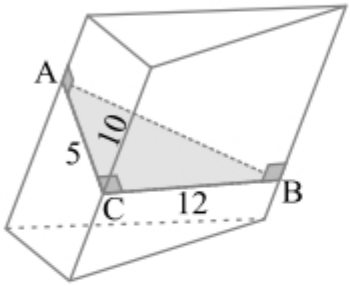
$$S_{т.б.} = 6a^2$$
$$V = a^3$$
$$D = a\sqrt{3}$$

© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

Үшбұрышты призманың екі жағы өзара перпендикуляр. Олардың ортақ қыры 10 см. Егер осы қыр қалған бүйір қырлардан 5 см және 12 см қашықтықта орналасса, онда призманың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

Шешімі:



Пифагор теоремасы бойынша:

$$AB^2 = 5^2 + 12^2$$
$$AB^2 = 169$$
$$AB = 13$$

Онда, $S_{б.б.} = P_{п.қима} \cdot l = (5+12+13) \cdot 10 = 300$

Жауабы: 300 см^2.

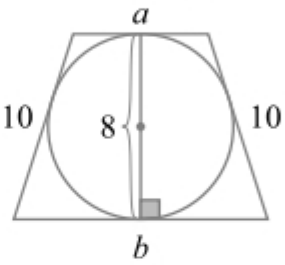
Мысал 2

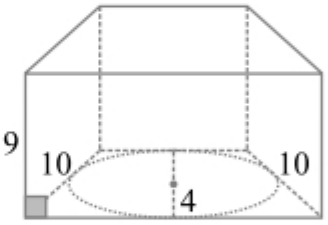
Тік призманың табаны бүйір қабырғасы 10 см болатын теңбүйірлі трапеция. Егер призманың бүйір қыры 9 см, ал табанына іштей сызылған шеңбердің радиусы 4 см болса, онда призманың көлемін табыңыз.

Шешімі:

Призманың көлемі келесі формуламен табылады: $V = S_{таб.} \cdot H$

Табанының ауданын табайық





Егер төртбұрыш шеңберге сырттай сызылса, онда оның қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болады, яғни

$$a + b = 10 + 10$$
$$a + b = 20$$

Демек, табанындағы трапецияның ауданы:

$$S_{таб} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{20}{2} \cdot 8 = 80$$

Онда, призманың көлемі:

$V = S_{таб.} \cdot H = 80 \cdot 9 = 720$

Жауабы: 720 см^3.

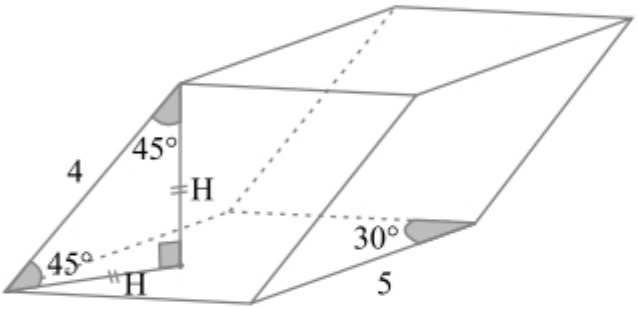
© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

Параллелепипедтің бір жағы қабырғасы 5 см, ал сүйір бұрышы 30° болатын ромб. Ұзындығы 4 см болатын параллелепипедтің бір қыры осы жақпен 45°-тық бұрыш жасайды. Параллелепипедтің көлемін табыңыз.

Шешімі:

Берілген ромб параллелепипедтің табаны болсын.



Пифагор теоремасы бойынша:

$$H^2 + H^2 = 4^2$$

$$2H^2 = 16$$

$$H = 2\sqrt{2}$$

Онда, параллелепипедтің көлемі:

$$V = S_{таб} \cdot H = a^2 \cdot \sin\alpha \cdot H = 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

Жауабы: $25\sqrt{2}$ см³.

Мысал 4

Кубтың толық бетінің ауданы 216 см². Диагональдық қимасының ауданың табыңыз.

Шешімі:

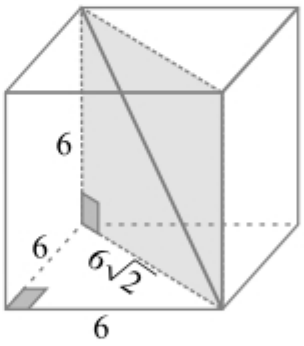
Кубтың толық беті 6 шаршыдан тұрады:

$$S_{т.б.} = 6a^2 = 216$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

Кубтың диагональдық қимасы тік төртбұрыш болады. Оның бір қабырғасы кубтың қырына тең, ал екінші қабырғасы кубтың табанының диагоналіне тең:



$$S_{қима} = ab = 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$$

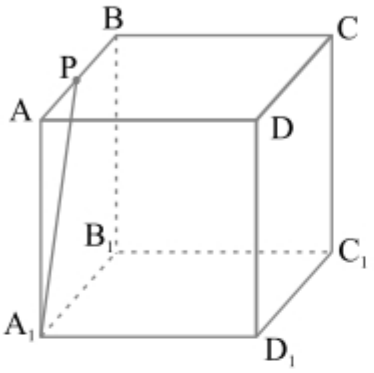
$$S_{қима} = ab = 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$$

Жауабы: $36\sqrt{2}$ см².

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. P нүктесі AB қырының ортасы. A_1C_1 және A_1P түзулерінің арасындағы бұрышты табыңыз.

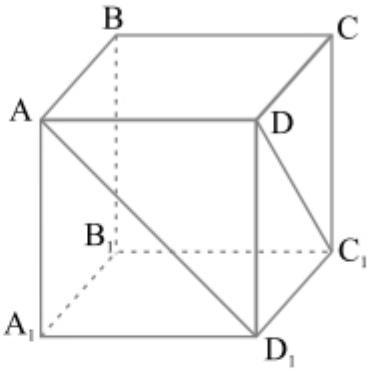


2. Дұрыс алтыбұрышты призманың табандарының қабырғасы 6 см, ал бүйір қырлары $2\sqrt{3}$ см. Призманың көлемін табыңыз.

3. Тікбұрышты параллелепипедтің табаны қабырғасы 6 см болатын квадрат. Егер параллелепипедтің диагоналі 9 см болса, онда оның көлемін табыңыз.

4. Тік призманың табаны диагональдары 12 см және 16 см болатын ромб. Егер призманың бүйір қыры 15 см болса, онда оның толық бетінің ауданын табыңыз.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. DC_1 мен AD_1 арасындағы бұрышты табыңыз.



6. Ұзындығы 8 см болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі бір жағымен 45°, ал екінші жағымен 30° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің көлемін табыңыз.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Егер кубтың қыры 4 см болса, онда AB қыры мен C_1C қырының ортасы арқылы жүргізілген қиманың ауданын табыңыз.

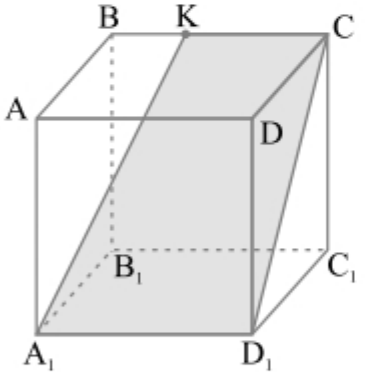
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Егер кубтың қыры 8 см болса, онда C және D_1 нүктелері мен AA_1 қырының ортасы арқылы жүргізілген қиманың ауданын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

9. Үшбұрышты тік призманың табаны катеттері 4 см және 6 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Егер призманың бүйір қыры 5 см болса, онда көлемін табыңыз.

10. Үшбұрышты призманың екі бүйір жағы өзара перпендикуляр, ал олардың ортақ қырының ұзындығы 20 см. Егер осы қыр қалған екі қырдан 8 см және 15 см қашықтықта орналасқан болса, онда призманың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

11. Қыры 12 см болатын $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Егер $KC=2BK$ болса, онда A_1KCD_1 төртбұрышының ауданын табыңыз.

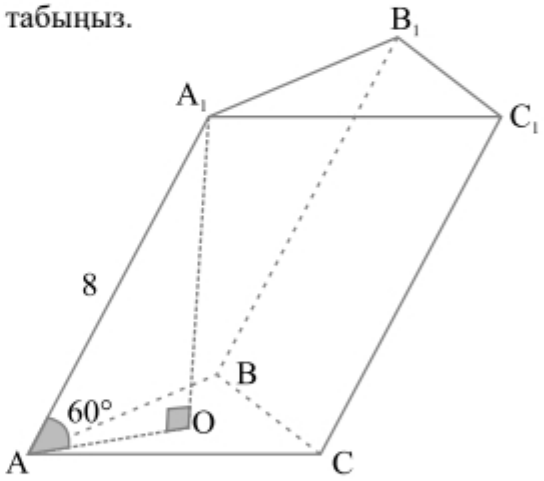


12. Кубтың диагоналі 18 см болса, онда толық бетін табыңыз.

13. Табандары қабырғасы 4 см болатын дұрыс алтыбұрыштар, ал бүйір қырлары 10 см және табан жазықтығына 30°-тық бұрыш жасап көлбеген призманың көлемін табыңыз.

14. Параллелепипедтің бір жағы қабырғасы 4 см, ал сүйір бұрышы 60° болатын ромб. Ұзындығы 6 см болатын параллелепипедтің бір қыры осы жақпен 30°-тық бұрыш жасайды. Параллелепипедтің көлемін табыңыз.

15. O нүктесі ABC дұрыс үшбұрышының центрі. Үшбұрышты призманың көлемін табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №13

1. Кубтың қыры $4\sqrt{2}$ см. Кубтың диагоналынан онымен қиылыспайтын бүйір қырына дейінгі қашықтықты табыңыз.
   A) 5 см
   B) 1 см
   C) 3 см
   D) 2 см
   E) 4 см

2. Кубтың диагональдық қимасының ауданы 4 см^2. Кубтың бетінің ауданын табыңыз.
   A) $16\sqrt{2}$ см^2
   B) $10\sqrt{2}$ см^2
   C) $12\sqrt{2}$ см^2
   D) $8\sqrt{2}$ см^2
   E) $18\sqrt{2}$ см^2

3. Тікбұрышты параллелепипедтің қырлары 16 см, 20 см және 12 см. Егер оның барлық қырларын 4 есе кемітсе, көлемі неше есе кемитінін табыңыз.
   A) 4 есе кемиді
   B) 8 есе кемиді
   C) 64 есе кемиді
   D) 16 есе кемиді
   E) 12 есе кемиді

4. Дұрыс $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см. AC_1C бұрышының градустық өлшемін табыңыз.
   A) 15°
   B) 75°
   C) 30°
   D) 45°
   E) 60°

5. Дұрыс үшбұрышты призманың бүйір жағының диагоналі 4 см және бүйір қырымен 45°-тық бұрыш жасайды. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) 10 см^2
   B) 24 см^2
   C) 14 см^2
   D) 12 см^2
   E) 28 см^2

6. Кубтың диагоналі $5\sqrt{3}$ см. Кубтың толық бетінің ауданын табыңыз.
   A) 150 см^2
   B) 200 см^2
   C) 175 см^2
   D) 125 см^2
   E) 225 см^2

7. Көлбеу үшбұрышты призманың бүйір қыры 8 см, ал екі өзара перпендикуляр бүйір жақтарының аудандары 32 см^2 және 48 см^2. Призманың көлемін табыңыз.
   A) 72 см^3
   B) 48 см^3
   C) 36 см^3
   D) 96 см^3
   E) 144 см^3

8. Көлемі 216 см^3 болатын кубтың толық бетінің ауданын табыңыз.
   A) 144 см^2
   B) 72 см^2
   C) 36 см^2
   D) 216 см^2
   E) 108 см^2

© «EduCon» басылымдары

9. Толық бетінің ауданы 150 см^2 болатын куб туралы дұрыс тұжырым(-дар)ды табыңыз.
   A) $a=3$ см
   B) $V=125$ см^3
   C) $S_{таб.}=36$ см^2
   D) $S_{б.б.}=100$ см^2
   E) $a=6$ см
   F) $V=216$ см^3
   G) $S_{таб.}=50$ см^2
   H) $S_{б.б.}=125$ см^2

10. Тік призманың табаны бүйір қабырғасы 13 см болатын теңбүйірлі трапеция. Егер призманың бүйір қыры 10 см, ал табанына іштей сызылған шеңбердің радиусы 6 см болса, онда призманың көлемін табыңыз.
   A) 1560 см^3
   B) 1440 см^3
   C) 1220 см^3
   D) 1800 см^3
   E) 1360 см^3

11. Тік параллелепипедтің табаны сүйір бұрышы 60° және үлкен диагоналі $8\sqrt{3}$ см болатын ромб. Параллелепипедтің кіші диагоналі табан жазықтығымен 45°-тық бұрыш жасайды. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) 192 см^2
   B) 144 см^2
   C) 186 см^2
   D) 216 см^2
   E) 256 см^2

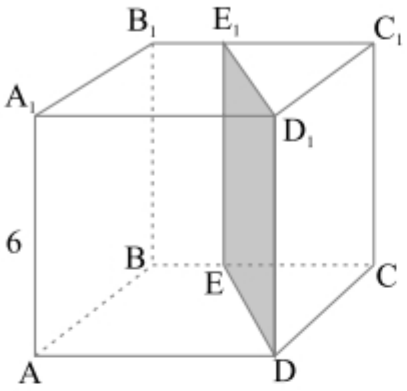
12. $ABCA_1B_1C_1$ тік призмасының табанының катеттері BC=3 см, AC=4 см болып келетін тікбұрышты үшбұрыш. Егер ABC және ABC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышы 45° болса, онда призманың бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) 12,4 см^2
   B) 22,4 см^2
   C) 36,8 см^2
   D) 28,8 см^2
   E) 32,6 см^2

13. Үшбұрышты призманың екі жағы өзара перпендикуляр. Олардың ортақ қыры 20 см. Егер осы қыр қалған бүйір қырлардан 3 см және 4 см қашықтықта орналасса, онда призманың бүйір бетінің ауданын табыңыз
   A) 180 см^2
   B) 200 см^2
   C) 240 см^2
   D) 280 см^2
   E) 300 см^2

14. Параллелепипедтің бір жағы қабырғасы 8 см, ал сүйір бұрышы 30° болатын ромб. Ұзындығы 6 см болатын параллелепипедтің бір қыры осы жақпен 60°-тық бұрыш жасайды. Параллелепипедтің көлемін табыңыз.
   A) $72\sqrt{3}$ см^3
   B) $96\sqrt{3}$ см^3
   C) $48\sqrt{2}$ см^3
   D) $36\sqrt{3}$ см^3
   E) $84\sqrt{2}$ см^3

© «EduCon» басылымдары

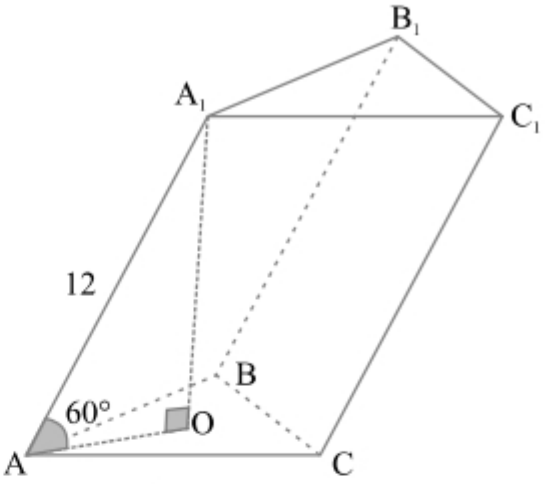
15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Егер $E_1C_1 = 2 \cdot B_1E_1$ болса, онда EDD_1E_1 төртбұрышының ауданын табыңыз.



A) $6\sqrt{13}$ см^2
B) $12\sqrt{2}$ см^2
C) $6\sqrt{3}$ см^2
D) $14\sqrt{3}$ см^2
E) $12\sqrt{13}$ см^2

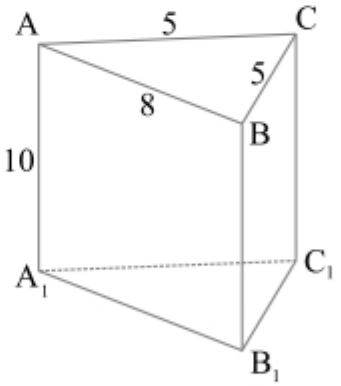
16. Дұрыс үшбұрышты призма тәріздес ыдысқа 1000 см^3 су құйылды. Ыдыстың ішіне металл бөлшекті тастаған кезде судың деңгейі 20 см-ден 23 см-ге дейін көтерілді. Металл бөлшектің көлемін табыңыз.
A) 60 см^3
B) 150 см^3
C) 46 см^3
D) 180 см^3
E) 250 см^3

17. O нүктесі ABC дұрыс үшбұрышының центрі. Призманың көлемін табыңыз.



A) 512 см^3
B) 486 см^3
C) 216 см^3
D) 244 см^3
E) 324 см^3

18. Тік призма берілген. Суреттегі берілгендерге қарап, дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.

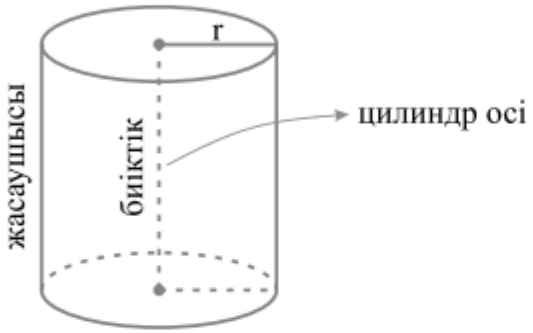


A) $S_{\text{таб.}} = 12$
B) $V = 140$
C) $S_{\text{б.б.}} = 180$
D) $S_{\text{т.б.}} = 192$
E) $S_{\text{таб.}} = 20$
F) $V = 160$
G) $S_{\text{б.б.}} = 210$
H) $S_{\text{т.б.}} = 204$

© «EduCon» басылымдары

ЦИЛИНДР

Тік төртбұрышты оның қабырғаларының бірінен айналдырғанда шығатын фигура **тік цилиндр** деп аталады.

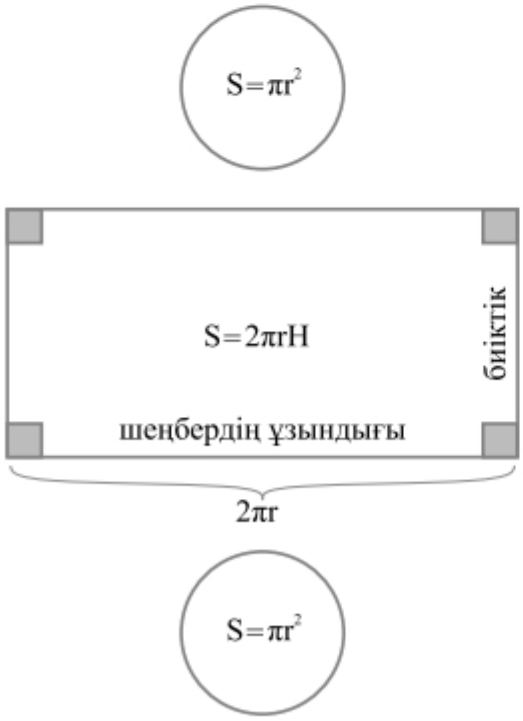


Көлемі: $V = \pi r^2 H$

Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = 2\pi rH$

Толық бетінің ауданы: $S_{т.б.} = 2\pi rH + 2\pi r^2$

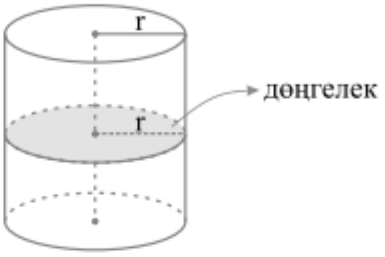
Цилиндрдің жазбасы



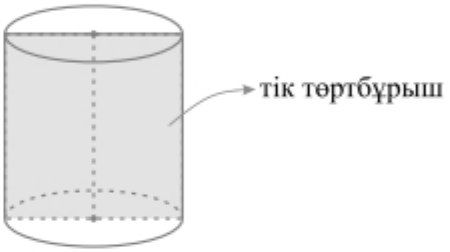
© «EduCon» басылымдары

Цилиндрдің негізгі қималары

1) Цилиндрдің табанына параллель немесе цилиндр осіне перпендикуляр қима.



2) Остік қима.

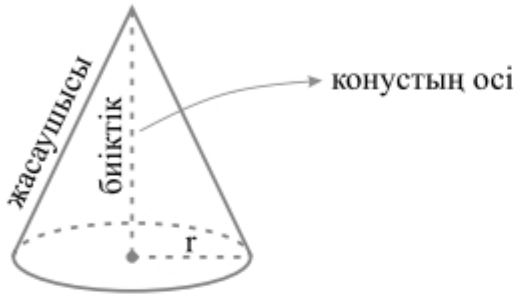


3) Цилиндр осіне параллель қима.

4) Цилиндр осіне параллель де емес, перпендикуляр да емес қима.

КОНУС

Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің бірінен айналдырғанда пайда болатын фигура **тік конус** деп аталады.



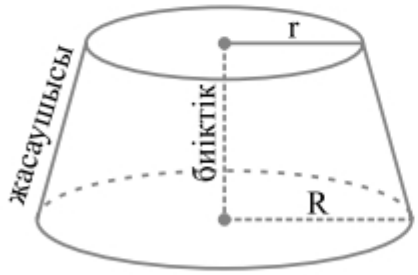
Көлемі: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$

Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = \pi r l$

Толық бетінің ауданы: $S_{т.б.} = \pi r^2 + \pi r l$

ҚИЫҚ КОНУС

Конустың табаны мен табанына параллель қиманың арасындағы бөлігі **қиық конус** деп аталады.



Көлемі: $V = \frac{1}{3}\pi H \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right)$

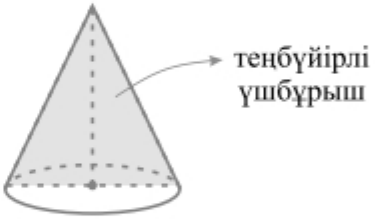
Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = \pi\left(R + r\right)l$

Толық бетінің ауданы:
$S_{т.б.} = \pi\left(R + r\right)l + \pi R^2 + \pi r^2$

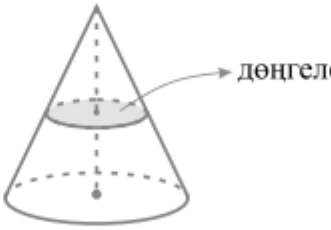
Конустың жазбасы

Конустың негізгі қималары

1) Остік қима.



2) Конустың табанына параллель немесе конус осіне перпендикуляр қима.



3) Конустың төбесі арқылы өтетін қима.

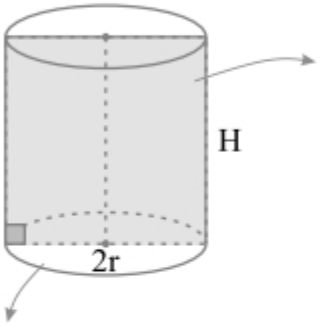
© «EduCon» басылымдары

Мысал 1

Цилиндрдің остік қимасының ауданы 80 см^2, ал табанының ауданы 25π см^2. Цилиндрдің көлемін табыңыз.

Шешімі:

Цилиндрдің остік қимасы тік төртбұрыш:



$S = 2r \cdot H = 80$

$2 \cdot 5 \cdot H = 80$

$H = 8$

Демек, цилиндрдің көлемі:

$V = \pi r^2 H = 25\pi \cdot 8 = 200\pi$

$S = \pi r^2 = 25\pi$

$r^2 = 25$

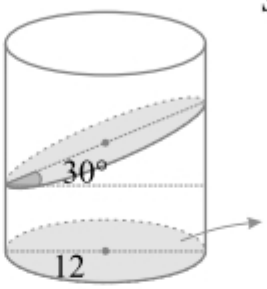
$r = 5$

Жауабы: 200π см^3.

Мысал 2

Табанының радиусы 12 см болатын цилиндрде табан жазықтығымен 30°-тық бұрыш жасайтын қима жүргізілді. Егер қима цилиндрдің табанына толығымен проекцияланса, онда қиманың ауданын табыңыз.

Шешімі:



$S_{\text{проек.}} = S_{\text{қима}} \cdot \cos\alpha$

$\pi r^2 = S_{\text{қима}} \cdot \cos 30°$

$144\pi = S_{\text{қима}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{\text{қима}} = 96\pi\sqrt{3}$

Жауабы: $96\pi\sqrt{3}$ см^2.

© «EduCon» басылымдары

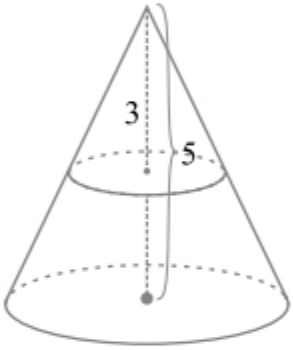
Мысал 3

Конустың биіктігі 5 см. Конустың төбесінен 3 см қашықтықта табанына параллель болатын қима жүргізілді. Егер қиып алынған конустың көлемі 81π см^3 болса, онда берілген конустың көлемін табыңыз.

Шешімі:

Қиып алынған мен берілген конустар ұқсас:

$$\frac{V_{\text{қиып ал. конус}}}{V_{\text{конус}}}=\left(\frac{h}{H}\right)^3$$



$$\frac{81\pi}{V_{\text{конус}}}=\frac{27}{125}$$

$$V_{\text{конус}}=375\pi$$

Жауабы: 375π см^3.

Мысал 4

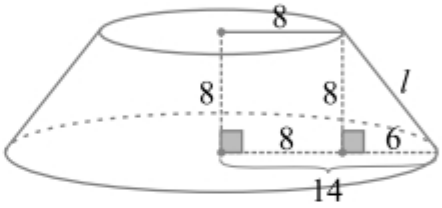
Биіктігі 8 см болатын қиық конустың табандарындағы шеңберлердің ұзындықтары 16π см және 28π. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

Шешімі:

Конустың табандарының радиустарын табайық:

$2\pi r=16\pi$ $\qquad$ $2\pi R=28\pi$

$r=8$ $\qquad$ $R=14$



Пифагор теоремасы бойынша:

$l^2=6^2+8^2$

$l^2=100$

$l=10$

Демек, $S_{б.б.}=\pi(R+r)l=\pi(14+8)\cdot 10=220\pi$

Жауабы: 220π см^2.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. Конустың жасаушысы $8\sqrt{2}$ және табан жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбеген. Конустың көлемін табыңыз.

2. Конустың остік қимасы периметр $8\left(2+\sqrt{2}\right)$ смболатын тікбұрышты үшбұрыш. Конустың толық бетінің ауданын табыңыз.

3. Конустың көлемі 32 см^3. Биіктіктің ортасы арқылы конустың табанына параллель болатын қима жүргізілді. Қиық конустың көлемін табыңыз.

4. Цилиндрдің остік қимасының ауданы 180 см^2, ал биіктігі 15 см. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңыз.

5. Конустың остік қимасы қабырғасы 8 см болатын дұрыс үшбұрыш. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

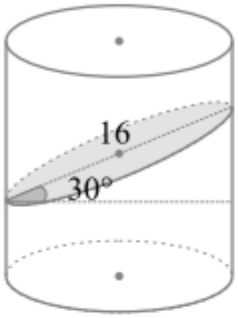
6. Конустың жасаушысы табан жазықтығына 30° бұрыш жасап көлбеген. Егер конустың биіктігі 12 см болса, онда оның көлемін табыңыз.

7. Қиық конустың табан радиустары 12 см және 8 см, ал жасаушы табан жазықтығымен 60° бұрыш жасап көлбеген. Қиық конустың остік қимасының ауданын табыңыз.

8. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы 24π см^2, ал табанының диаметрі 8 см. Цилиндрдің биіктігін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

9. Цилиндрде табан жазықтығымен 30°-тық бұрыш жасайтын қима жүргізілді. Қиманың үлкен осі 16 см. Егер қима цилиндрдің табанына толығымен проекцияланса, онда қиманың ауданын табыңыз.

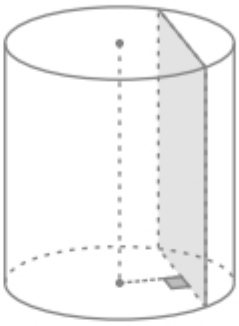


10. Конустың остік қимасы бүйір қабырғасы 16 см, ал төбесіндегі бұрыш 120° болатын үшбұрыш. Конустың көлемін табыңыз.

11. Цилиндрдің остік қимасы шаршы. Егер цилиндрдің биіктігі 16 см болса, онда оның көлемін табыңыз.

12. Конустың жасаушысы 13 см, ал биіктігі 5 см. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

13. Цилиндрдің биіктігі 10 см, ал табанының диаметрі 26 см. Цилиндр осіне параллель және одан 5 см қашықтықта жүргізілген қиманың ауданын табыңыз.



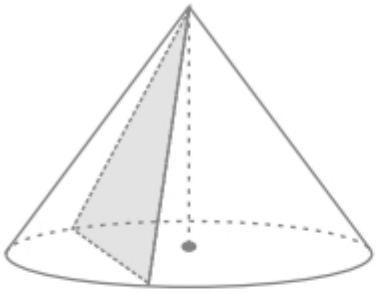
14. Цилиндрдің табанындағы шеңбердің ұзындығы 16π см. Егер цилиндрдің биіктігі 10 см болса, онда оның көлемін табыңыз.

15. Цилиндрдің табанының ауданы 36π см^2, ал биіктігі 10 см. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңыз.

16. Цилиндрдің остік қимасының ауданы 90 см^2, ал табанының ауданы 81π см^2. Цилиндрдің көлемін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

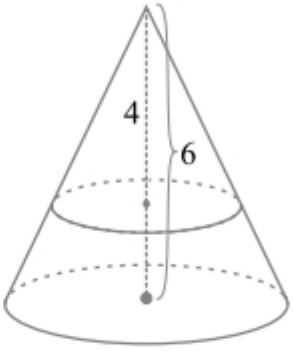
17. Конустың биіктігі 12 см. Конустың төбесі және табанындағы 60°-тық доғаны керетін хорда арқылы қима жүргізілді. Егер қима жазықтығы мен конустың табан жазықтығы арасындағы бұрыш 30° болса, онда қиманың ауданын табыңыз.



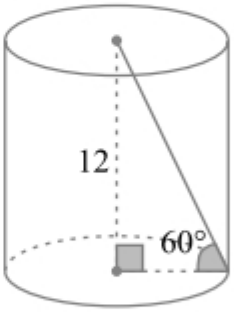
18. Цилиндрдің табанындағы бір нүктеден табан жазықтығымен 45°-тық бұрыш жасайтын қима жүргізілді. Қиманың үлкен осі 20 см. Егер қиманың жоғарғы нүктесі цилиндр биіктігінің (жасаушысының) ортасында орналасса, онда цилиндрдің көлемін табыңыз.

19. Табанының радиусы 16 см болатын цилиндрде табан жазықтығымен 30°-тық бұрыш жасайтын қима жүргізілді. Егер қима цилиндрдің табанына толығымен проекцияланса, онда қиманың ауданын табыңыз.

20. Конустың биіктігі 6 см. Конустың төбесінен 4 см қашықтықта табанына параллель болатын қима жүргізілді. Егер қиық конустың көлемі 114π см^3 болса, онда берілген конустың көлемін табыңыз.



21. Суретте көрсетілген цилиндрдің көлемін табыңыз.



22. Цилиндрдің остік қимасының диагоналі 25 см. Егер цилиндрдің биіктігі 15 см болса, онда цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №14

1. Конустың табанының радиусы 12 см. Биіктіктің ортасы арқылы табанына параллель болатын жазықтық жүргізілді. Пайда болған қиманың ауданын табыңыз.
   A) 144π см^2
   B) 48π см^2
   C) 72π см^2
   D) 108π см^2
   E) 36π см^2

2. Цилиндрдің остік қимасы – шаршы. Егер цилиндр табанының ауданы 36π см^2 болса, онда осы қиманың ауданын табыңыз.
   A) 100 см^2
   B) 81 см^2
   C) 64 см^2
   D) 169 см^2
   E) 144 см^2

3. Цилиндрдің остік қимасының диагоналі табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбеген және ұзындығы 8 см. Цилиндрдің остік қимасының ауданын табыңыз.
   A) $16\sqrt{2}$ см^2
   B) $24\sqrt{3}$ см^2
   C) $16\sqrt{3}$ см^2
   D) $12\sqrt{3}$ см^2
   E) $8\sqrt{2}$ см^2

4. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы $80\,\pi$ см^2, ал көлемі 160π см^3. Цилиндрдің табанының радиусын табыңыз.
   A) 4 см
   B) 5 см
   C) 6 см
   D) 8 см
   E) 2 см

5. Конустың табанындағы шеңбердің ұзындығы 24π см. Егер конустың жасаушысы 8 см болса, онда оның бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) 48π см^2
   B) 64π см^2
   C) 140π см^2
   D) 96π см^2
   E) 56π см^2

6. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы 120π см^2. Цилиндрдің остік қимасының ауданын табыңыз.
   A) 240 см^2
   B) 120 см^2
   C) 160 см^2
   D) 80 см^2
   E) 60 см^2

7. Қиық конустың табандарының радиустары 6 см және 12 см, ал жасаушысы 10 см. Конус жасаушысының табанына көлбеу бұрышының тангенсін табыңыз.
   A) $\frac{4}{3}$
   B) $\frac{3}{5}$
   C) $\frac{3}{4}$
   D) 2
   E) 1

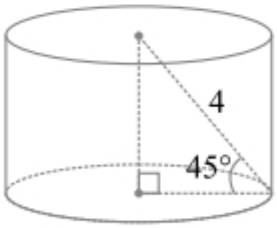
8. Цилиндрдің остік қимасының ауданы 90 см^2. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) 180π см^2
   B) 45π см^2
   C) 72π см^2
   D) 36π см^2
   E) 90π см^2

© «EduCon» басылымдары

9. Конустың жасаушысы 12 см. Арасындағы бұрын 30° болатын конустың екі жасаушысы арқылы өтетін қиманың ауданын табыңыз.
   A) 22 см^2
   B) 24 см^2
   C) 36 см^2
   D) 48 см^2
   E) 18 см^2

10. Цилиндрдің жасаушысы арқылы араларындағы бұрыш 60° болатын екі жазықтық жүргізілді. Осы жазықтықтардың цилиндрдегі қималары шаршы және біреуінің ауданы 9 см^2. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) $18\pi\sqrt{2}$ см^2
   B) $6\pi\sqrt{3}$ см^2
   C) $8\pi\sqrt{2}$ см^2
   D) $12\pi\sqrt{3}$ см^2
   E) $4\pi\sqrt{3}$ см^2

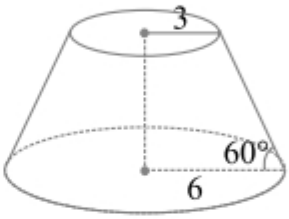
11. Цилиндрдің көлемін табыңыз.



   A) $18\pi\sqrt{3}$ см^3
   B) $12\pi\sqrt{2}$ см^3
   C) $16\pi\sqrt{2}$ см^3
   D) $24\pi\sqrt{3}$ см^3
   E) $8\pi\sqrt{2}$ см^3

12. Цилиндрдің табанының радиусы 3 см, ал биіктігі 8 см. Остік қиманың диагоналін табыңыз.
   A) 12 см
   B) 11 см
   C) 10 см
   D) 6 см
   E) 13 см

13. Қиық конустың көлемін табыңыз.



   A) $33\pi\sqrt{3}$
   B) $63\pi\sqrt{3}$
   C) $45\pi\sqrt{2}$
   D) $48\pi\sqrt{2}$
   E) $27\pi\sqrt{3}$

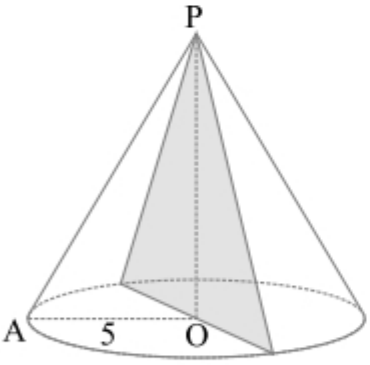
14. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі 20 см, ал биіктігі 12 см болса, онда келесі теңдіктердің дұрыс(-тар)ын анықтаңыз.
   A) $D=16$ см
   B) $S_{т.б.}=320\pi$ см^2
   C) $S_{б.б.}=192\pi$ см^2
   D) $R=16$ см
   E) $V=760\pi$ см^3
   F) $S_{таб.}=128\pi$ см^2
   G) $S_{о.кима.}=96$ см^2
   H) $D=32$ см

© «EduCon» басылымдары

15. Конустың жасаушысы табанына 15° бұрыш жасап көлбеген және ұзындығы 8 см. Конустың остік қимасының ауданын табыңыз.
A) 12 см²
B) 14 см²
C) 16 см²
D) 18 см²
E) 24 см²

16. Конустың остік қимасы периметрі $12\left(2+\sqrt{2}\right)$ см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңыз.
A) $36\pi\sqrt{2}$ см²
B) $48\pi\sqrt{2}$ см²
C) $96\pi\sqrt{2}$ см²
D) $72\pi\sqrt{2}$ см²
E) $24\pi\sqrt{2}$ см²

17. Конустың бүйір бетінің ауданы 75π см². Боялған фигураның ауданын табыңыз.

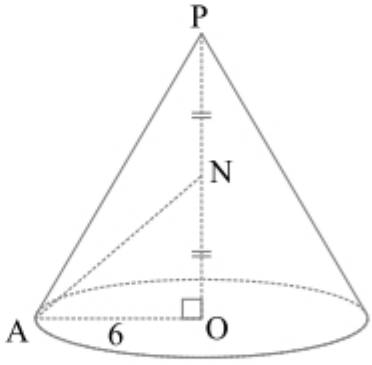


A) $50\sqrt{2}$ см²
B) $25\sqrt{2}$ см²
C) $40\sqrt{2}$ см²
D) $25\sqrt{3}$ см²
E) $30\sqrt{3}$ см²

18. Цилиндрдің биіктігі 8 см, ал табанының диаметрі 10 см. Цилиндр осінен 3 см қашықтықта және оған параллель болатын қиманың ауданын табыңыз.
A) 24 см²
B) 32 см²
C) 64 см²
D) 48 см²
E) 72 см²

19. Цилиндрдің осіне параллель және одан 4 см қашықтықта шаршы болатын қима жүргізілді. Егер цилиндрдің бүйір бетінің ауданы 60π см² болса, онда қиманың ауданын табыңыз.
A) 48 см²
B) 36 см²
C) 24 см²
D) 49 см²
E) 81 см²

20. Конустың көлемі 48π болса, онда келесі теңдіктердің дұрыс(-тар)ын анықтаңыз.



A) $AP=2\sqrt{13}$
B) $NO=3$
C) $PN=4$
D) $AN=2\sqrt{10}$
E) $S_{таб.}=16\pi$
F) $S_{б.б.}=12\sqrt{13}\pi$
G) $S_{ANO}=12$
H) $S_{APO}=24$

© «EduCon» басылымдары

ПИРАМИДА

Бір жағы (табаны) кез келген көпбұрыш, ал қалған бүйір жақтары төбелері ортақ болатын үшбұрыштардан тұратын көпжақ **пирамида** деп аталады.

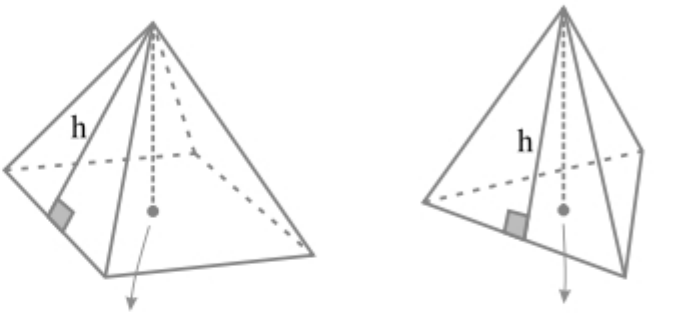
Көлемі: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{таб} \cdot H$

Толық бетінің ауданы: $S_{т.б.} = S_{б.б.} + S_{таб}$

© «EduCon» басылымдары

Дұрыс пирамида

Табаны дұрыс көпбұрыш, ал төбесінің проекциясы табанының центріне түсетін пирамиданы **дұрыс пирамида** деп атайды.



Бүйір жақтары – өзара тең теңбүйірлі үшбұрыштар.

Бүйір қырлары тең.

Апофемалары тең.

Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = \frac{1}{2} P \cdot h$

P – табанының периметрі.

h – апофема.

ҚИЫҚ ПИРАМИДА

Пирамиданың табаны мен табан жазықтығына параллель қима жазықтығы арасындағы бөлігі **қиық пирамида** деп аталады.

Көлемі: $V=\frac{1}{3}H\cdot\left(S+\sqrt{Ss}+s\right)$

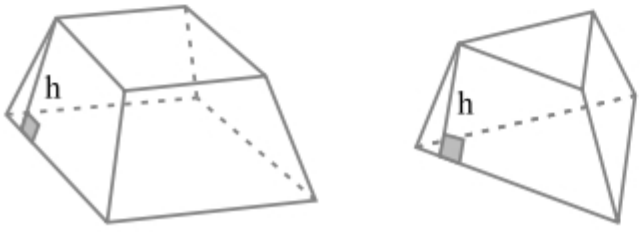
Толық бетінің ауданы: $S_{т.б.}=S_{б.б.}+S+s$

S – төменгі табанының ауданы.

s – жоғарғы табанының ауданы.

Дұрыс қиық пирамида

Дұрыс пирамидадан алынған қиық пирамида **дұрыс қиық пирамида** деп аталады.



Бүйір жақтары – өзара тең теңбүйірлі трапециялар.

Бүйір қырлары тең.

Апофемалары тең.

Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.}=\frac{1}{2}(P+p)\cdot h$

P – төменгі табанының периметрі.

p – жоғарғы табанының периметрі.

h – апофема

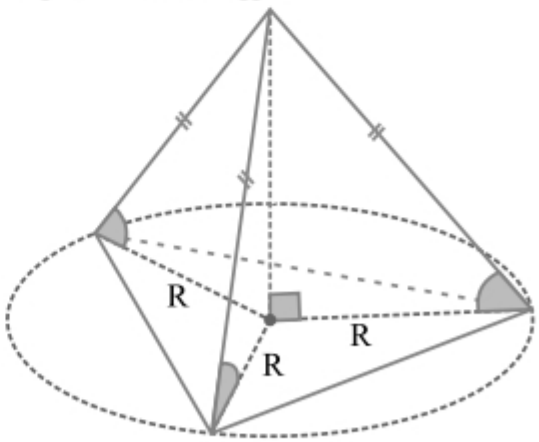
Пирамиданың қасиеттері

1) Егер пирамиданың барлық бүйір қырлары өзара тең болса, онда пирамиданың табанына сырттай шеңбер сызуға болады.

   Пирамиданың төбесінің проекциясы сол шеңбердің центріне түседі.

   Бүйір қырлары табан жазықтығына бірдей бұрыш жасап көлбейді.

   Керісіншесі де дұрыс.



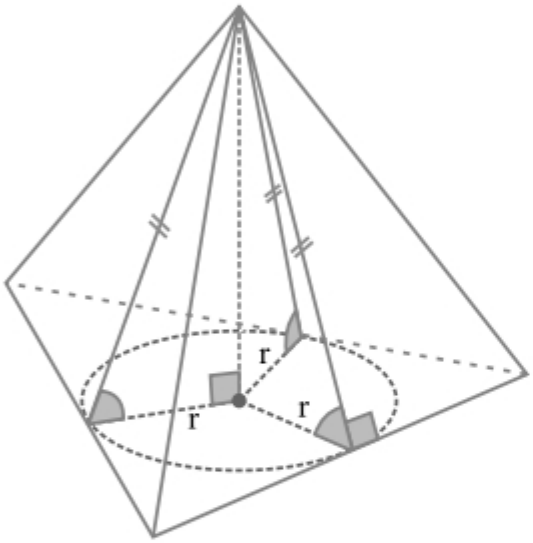
© «EduCon» басылымдары

2) Егер пирамиданың бүйір жақтарының биіктіктері өзара тең болса, онда пирамиданың табанына іштей шеңбер сызуға болады.

   Пирамиданың төбесінің проекциясы сол шеңбердің центріне түседі.

   Бүйір жақтары табан жазықтығына бірдей бұрыш жасап көлбейді.

   Керісіншесі де дұрыс.



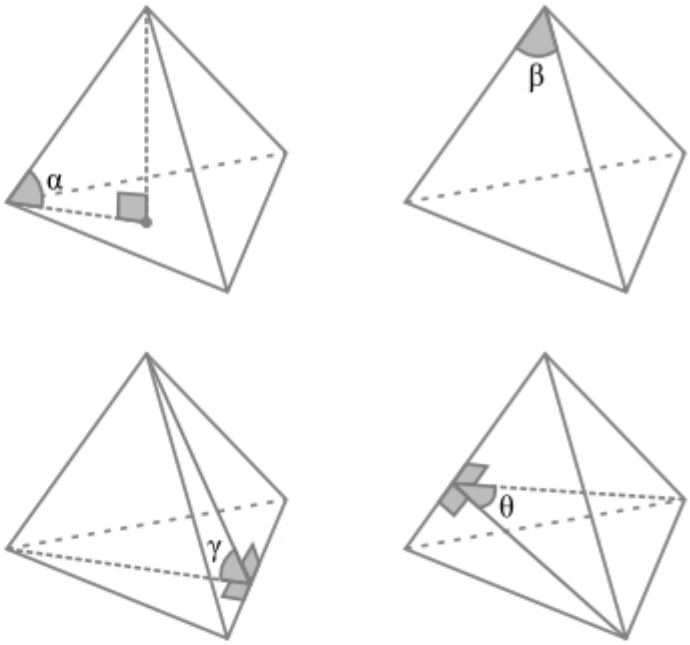
Пирамидадағы бұрыштар

1) α – бүйір қыр мен табан жазықтығы арасындағы бұрыш

2) β – пирамида төбесіндегі жазық бұрыш

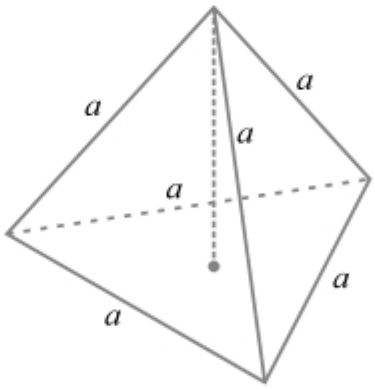
3) γ – пирамида табанындағы екіжақты бұрыш

4) θ – бүйір қырындағы екіжақты бұрыш



Дұрыс тетраэдр

Барлық жақтары дұрыс үшбұрыш болып келетін пирамида **дұрыс тетраэдр** деп аталады.



Биіктігі: $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Көлемі: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Толық бетінің ауданы: $S_{т.б.} = a^2\sqrt{3}$

© «EduCon» басылымдары

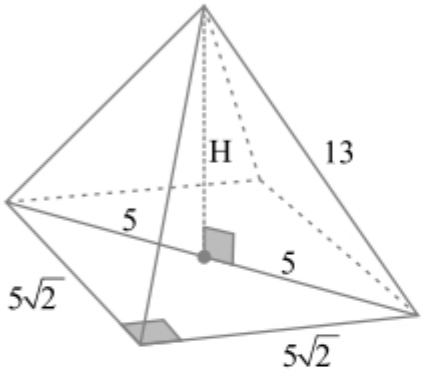
Мысал 1

Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табан қабырғасы $5\sqrt{2}$ см, ал бүйір қыры 13 см. Пирамиданың көлемін табыңыз.

Шешімі:

Табанындағы квадраттың диагоналін табайық:

$$d = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10$$



Пирамиданың төбесі квадраттың центріне проекцияланады.

Пифагор теоремасы бойынша:

$$H^2 + 5^2 = 13^2$$

$$H^2 = 144$$

$$H = 12$$

Демек, пирамиданың көлемі:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{таб} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 \cdot 12 = 200$$

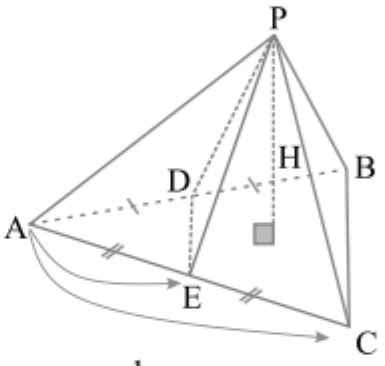
Жауабы: 200 см^3.

Мысал 2

Көлемі 24 см^3 болатын пирамидадан оның төбесі және табанының орта сызығы арқылы өтетін жазықтықпен үшбұрышты пирамида қиып алынды. Қиып алынған пирамиданың көлемін табыңыз.

Шешімі:

Берілген және қиып алынған пирамидалардың биіктіктері ортақ. Демек, олардың көлемдерінің қатынасы табан аудандарының қатынасына тең:



$$\frac{V_{PADE}}{V_{PABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{ADE} \cdot H}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot H}$$

$$\frac{V_{PADE}}{V_{PABC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2$$

$$\frac{V_{PADE}}{24} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$V_{PADE} = 6$$

Жауабы: 6 см^3.

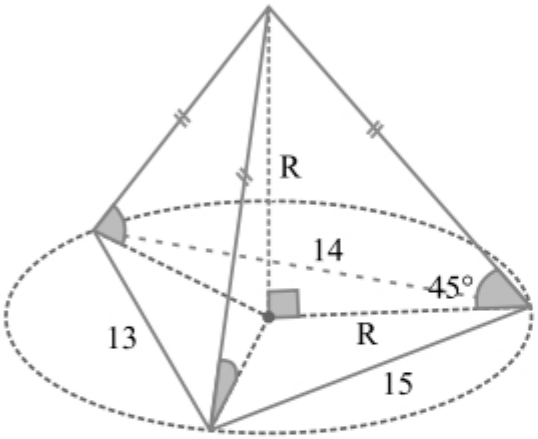
© «EduCon» басылымдары

Мысал 3

Пирамиданың барлық бүйір қырлары табан жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбеген. Егер табанында қабырғалары 13 см, 14 см және 15 см болатын үшбұрыш жатса, онда пирамиданың көлемін табыңыз.

Шешімі:

Пирамиданың төбесі табанына сырттай сызылған шеңбердің центріне проекцияланады:



$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{таб} \cdot H$$

Герон формуласы бойынша үшбұрыштың ауданын табайық:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

$$S = 84$$

Табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусын табайық:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$$

Онда, $H = R = \frac{65}{8}$

Демек, пирамиданың көлемі:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{таб} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{65}{8} = 227{,}5$$

Жауабы: 227,5 см^3.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

1. SABC дұрыс үшбұрышты пирамидада ABC табанының медианалары O нүктесінде қиылысады. ABC үшбұрышының ауданы 9 см^2, ал пирамиданың көлемі 12 см^3. OS кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

2. SABCD дұрыс төртбұрышты пирамидада O нүктесі табанының центрі, ал S нүктесі пирамиданың төбесі. Егер SO=15 см, BD=16 см болса, онда SA қырының ұзындығын табыңыз.

3. SABC дұрыс үшбұрышты пирамидада M нүктесі AB қырының ортасы, ал S нүктесі пирамиданың төбесі. Егер BC=5 см, ал пирамиданың бүйір бетінің ауданы 60 см^2 болса, онда SM кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

4. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табан қабырғасы 10 см, ал бүйір қыры 13 см. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

5. Табан қабырғасы 10 см, ал биіктігі 12 см болатын дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңыз.

6. Төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 6 см және 10 см тең. Егер пирамиданың бүйір қыры табан жазықтығымен 60° бұрыш жасаса, онда диагональдық қимасының ауданын табыңыз.

7. Көлемі 36 см^3 болатын пирамидадан оның төбесі және табанының орта сызығы арқылы өтетін жазықтықпен үшбұрышты пирамида қиып алынды. Қиып алынған пирамиданың көлемін табыңыз.

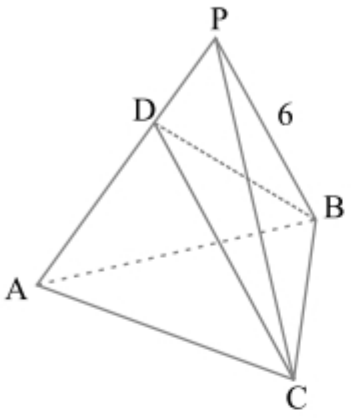
8. Пирамиданың табаны тік төртбұрыш. Пирамиданың бір жағы табан жазықтығына перпендикуляр, ал қалған үш жағы табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбеген. Егер пирамиданың биіктігі $6\sqrt{3}$ см болса, онда көлемін табыңыз.

9. Үшбұрышты пирамиданың екі қарама-қарсы қыры 8 см және 24 см, ал қалған қырларының ұзындығы 14 см. Пирамиданың көлемін табыңыз.

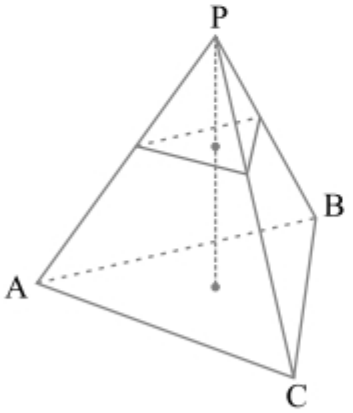
10. Үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары өзара перпендикуляр және ұзындықтары 8 см. Пирамиданың көлемін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

11. $PABC$ – дұрыс тетраэдр. Егер $PD:DA=1:2$ болса, онда $DABC$ пирамидасының көлемін табыңыз.

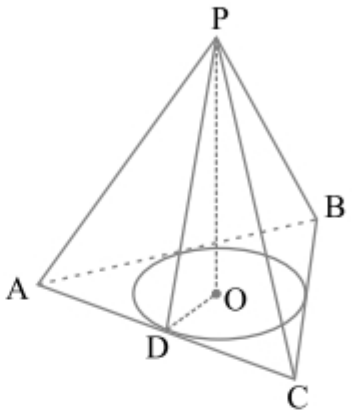


12. Үшбұрышты пирамида табанына параллель және төбесінен санағанда биіктікті 2:3 қатынасындай етіп бөлетін жазықтықпен қиылады. Егер берілген пирамиданың көлемі 250 см^3 болса, онда қиық пирамиданың көлемін табыңыз.

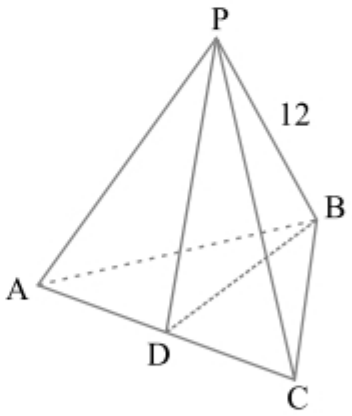


13. Үшбұрышты пирамиданың көлемі 30 см^3. Пирамиданың табан қабырғасы және сол қабырғаға қарсы жатқан қыр арқылы жазықтық жүргізілді. Егер жазықтық пирамиданың қырын төбесінен санағанда 2:3 қатынасындай бөлетін болса, онда пайда болған пирамидалардың көлемі үлкен болатын пирамиданың көлемін табыңыз.

14. PO – дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі. Егер $PO=12$ см және $OD=5$ см болса, онда пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңыз.



15. $PABC$ – дұрыс тетраэдр. D нүктесі AC қырының ортасы. PDB үшбұрышының ауданын табыңыз.



16. Барлық бүйір қырлары тең болатын төртбұрышты пирамида берілген. Пирамиданың табаны қабырғалары 12 см және 16 см болатын тік төртбұрыш, ал көлемі 320 см^3. Пирамиданың бүйір қырын табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №15

1. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табан қабырғасы 6 см, ал бүйір бетінің ауданы табанының ауданынан 2 есе үлкен. Пирамиданың биіктігін табыңыз.
   A) 4 см
   B) 3 см
   C) 1 см
   D) $2\sqrt{2}$ см
   E) $3\sqrt{2}$ см

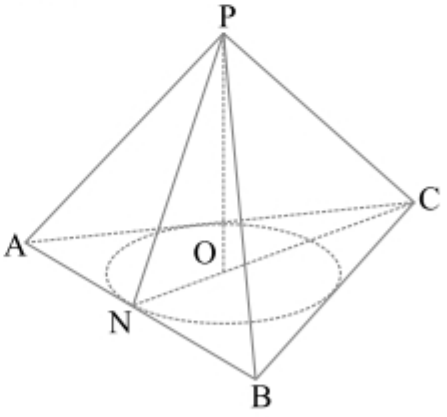
2. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандары 6 см және 3 см. Егер пирамиданың бүйір бетінің ауданы табан аудандарының қосындысына тең болса, онда пирамиданың биіктігін табыңыз.
   A) 2 см
   B) 1 см
   C) 4 см
   D) $\sqrt{3}$ см
   E) $2\sqrt{2}$ см

3. Бүйір қыры 3 см, ал табандары 5 см және 1 см болатын дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың көлемін табыңыз.
   A) $9\frac{2}{3}$ см^3
   B) 31 см^3
   C) 27 см^3
   D) $10\frac{1}{3}$ см^3
   E) 14 см^3

4. Үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары өзара перпендикуляр және ұзындықтары 3 см, 4 см және 5 см. Пирамиданың көлемін табыңыз.
   A) 7 см^3
   B) 12 см^3
   C) 8 см^3
   D) $6\sqrt{2}$ см^3
   E) 10 см^3

5. Пирамиданың табанында биіктігі 9 см, ал табаны 6 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш жатыр. Пирамиданың бүйір қырлары тең және ұзындықтары 13 см. Пирамиданың биіктігін табыңыз.
   A) 18 см
   B) 13 см
   C) 14 см
   D) 12 см
   E) 15 см

6. PABC – дұрыс пирамида. $PO \perp (ABC)$, $S_{\Delta PNC} : S_{\Delta ABC} = 1:2$. PNC бұрышының градустық өлшемін табыңыз.



   A) 75°
   B) 60°
   C) 45°
   D) 30°
   E) 15°

© «EduCon» басылымдары

7. Табаны мен диагональдік қимасының аудандары 36 см^2-тан болатын дұрыс төртбұрышты пирамида берілген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) 132 см^2
   B) 96 см^2
   C) 144 см^2
   D) 112 см^2
   E) 108 см^2

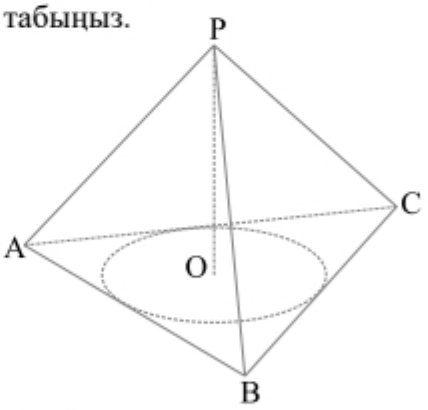
8. Пирамиданың биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель болатын қима жүргізілді. Егер табанының ауданы 36 см^2 болса, онда қиманың ауданын табыңыз.
   A) 9 см^2
   B) 6 см^2
   C) 12 см^2
   D) 18 см^2
   E) 24 см^2

9. Үшбұрышты пирамиданың екі бүйір жағы өзара перпендикуляр және олардың аудандары a және b, ал ортақ қырының ұзындығы n. Пирамиданың көлемін табыңыз.
   A) $\frac{ab}{3n}$
   B) $\frac{3ab}{2n}$
   C) $\frac{2ab}{3n}$
   D) $\frac{3ab}{4n}$
   E) $\frac{ab}{6n}$

10. Бүйір қыры 2 см, ал табанының қабырғасы 3 см болатын дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігін табыңыз.
   A) 1 см
   B) $\sqrt{3}$ см
   C) $\frac{1}{3}$ см
   D) 2 см
   E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см

11. Бүйір қырының ұзындығы 10 см, ал табанының қабырғасы $6\sqrt{2}$ см болатын дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігін табыңыз.
   A) 7 см
   B) 8 см
   C) 6 см
   D) 5 см
   E) 9 см

12. Табаны ABC үшбұрышы болатын дұрыс пирамида берілген. PO=8 см, S_o=225π см^2 Пирамиданың төбесінен табанының қабырғаларына дейінгі қашықтықты табыңыз.

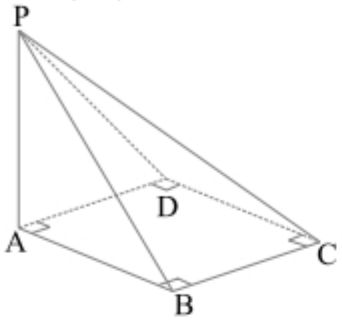


   A) 18 см
   B) 12 см
   C) 15 см
   D) 17 см
   E) 16 см

© «EduCon» басылымдары

13. $PA \perp (ABCD)$. $PB = 2\sqrt{10}$, $PC = 8$, $PD = 7$.

Төмендегі тұжырымардың дұрыс(-тар)ын анықтаңыз.



A) $DB = \sqrt{39}$
B) $S_{ABCD} = 5\sqrt{10}$
C) $AP = 4$
D) $S_{PBC} = 6\sqrt{6}$
E) $AD = 2\sqrt{6}$
F) $S_{APB} = 5\sqrt{15}$
G) $S_{APD} = 5\sqrt{6}$
H) $DC = 2\sqrt{3}$

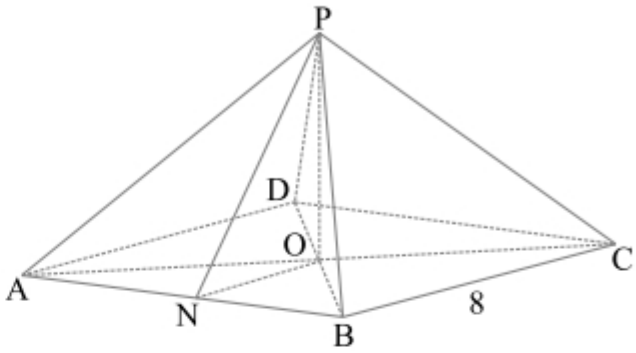
14. Шаршының төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктеден шаршы жазықтығына дейінгі қашықтық 4 см. Егер шаршының қабырғасы 10 см болса, онда осы нүктеден шаршының қабырғаларына дейінгі қашықтықты табыңыз.

A) 5 см
B) $\sqrt{41}$ см
C) $\sqrt{29}$ см
D) 3 см
E) $\sqrt{15}$ см

15. Дұрыс тетраэдрдің барлық қырларының қосындысы $18\sqrt{2}$. Тетраэдрдің толық бетінің ауданын табыңыз.

A) 48 см^2
B) $18\sqrt{3}$ см^2
C) $12\sqrt{2}$ см^2
D) 36 см
E) $9\sqrt{3}$ см^2

16. Дұрыс төртбұрышты пирамида туралы дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.
$AN = NB$, $\angle PNO = 60°$.



A) $S_{NOB} = 8$
B) $S_{POC} = 8\sqrt{6}$
C) $PB = 4\sqrt{5}$
D) $V = 256\sqrt{3}$
E) $S_{таб.} = 128$
F) $S_{б.б.} = 256$
G) $S_{PBC} = 48$
H) $PO = 4\sqrt{2}$

17. Пирамиданың барлық бүйір қырлары табан жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбеген. Егер табанында қабырғалары 4 см, 6 см және 8 см болатын үшбұрыш жатса, онда пирамиданың көлемін табыңыз.

A) 8 см^3
B) 16 см^3
C) $8\sqrt{2}$ см^3
D) 12 см^3
E) $6\sqrt{2}$ см^3

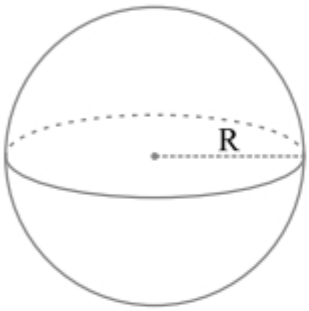
18. Төбесіндегі жазық бұрыш 30° және биіктігі $\sqrt{3}$ болатын дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңыз.

A) $3\left(2-\sqrt{3}\right)$
B) $2\left(2-\sqrt{3}\right)$
C) $2\left(3+\sqrt{2}\right)$
D) $2\left(2+\sqrt{3}\right)$
E) $3\left(3-\sqrt{2}\right)$

© «EduCon» басылымдары

ШАР ЖӘНЕ СФЕРА

Жарты дөңгелекті оның диаметрінен айналдырғанда шығатын фигура **шар** деп аталады.
Шардың беті **сфера** деп аталады.

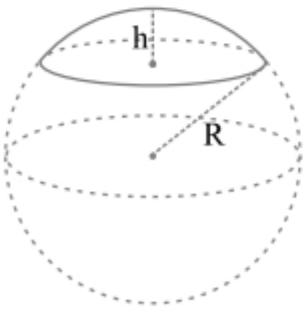


Шардың көлемі: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Сфераның ауданы: $S = 4\pi R^2$

ШАР СЕГМЕНТІ

Жазықтықпен қиып алынған шардың бөлігі **шар сегменті** деп аталады.

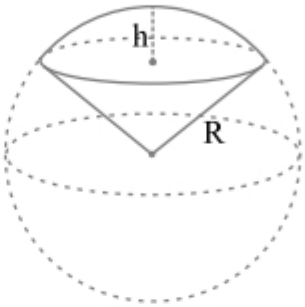


$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3R - h)$$

$$S_{б.б.} = 2\pi Rh$$

ШАР СЕКТОРЫ

Дөңгелек секторын оны шектейтін радиустардың бірімен айналдырғанда шығатын фигура **шар секторы** деп аталады.



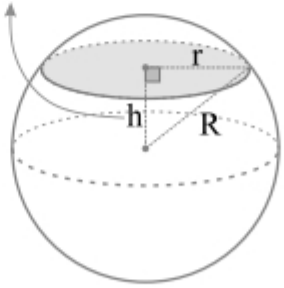
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

$$S_{т.б.} = \pi R\left(2h + \sqrt{2Rh - h^2}\right)$$

Шардың қимасы

Шардың барлық жазық қималары – дөңгелек.

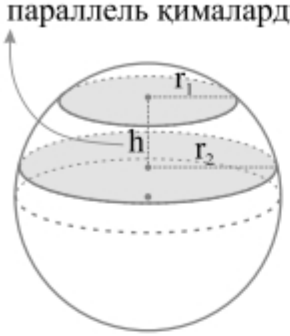
шар центрінен қима жазықтығына дейінгі қашықтық



© «EduCon» басылымдары

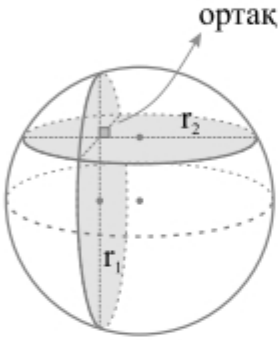
1) Екі параллель қима

параллель қималардың арасындағы қашықтық

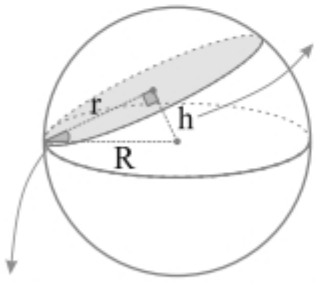


2) Екі өзара перпендикуляр қималар

ортақ хорда



3) Шар диаметрінің ұшы арқылы жүргізілетін қима



шар центрінен қима жазықтығына дейінгі қашықтық

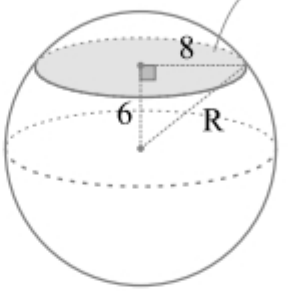
жазықтықтар арасындағы бұрыш

Мысал 1

Шар центрінен 6 см қашықтықта орналасқан қиманың ауданы 64π см^2. Сфераның ауданын табыңыз.

Шешімі:

$S = \pi r^2 = 64\pi$



$r^2 = 64$

$r = 8$

Пифагор теоремасы бойынша:

$R^2 = 6^2 + 8^2$

$R^2 = 100$

$R = 10$

Демек, сфераның ауданы:

$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$

Жауабы: 400π см^2.

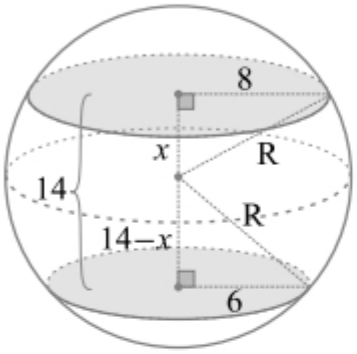
© «EduCon» басылымдары

Мысал 2

Шардың екі параллель қималарының аудандары 64π см^2 және 36π см^2. Қималардың арақашықтығы 14 см және шардың центрі қималардың арасында орналасқан. Шардың көлемін табыңыз.

Шешімі:

Дөңгелектердің радиустарын табайық:



$S_1 = \pi r_1^2 = 64\pi$ $\quad$ $S_2 = \pi r_2^2 = 36\pi$

$r_1^2 = 64$ $\quad$ $r_2^2 = 36$

$r_1 = 8$ $\quad$ $r_2 = 6$

Пифагор теоремасы бойынша:

$$\begin{cases} x^2 + 8^2 = R^2 \\ (14-x)^2 + 6^2 = R^2 \end{cases}$$

$$x^2 + 64 = (14-x)^2 + 36$$

$$x^2 + 64 = 196 - 28x + x^2 + 36$$

$$28x = 168$$

$$x = 6$$

Онда, $R^2 = 6^2 + 8^2$ Демек, шардың көлемі:

$$R^2 = 100$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3}$$

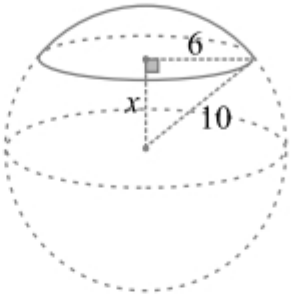
$$R = 10$$

Жауабы: $\frac{4000\pi}{3}$ см^3.

Мысал 3

Табанының радиусы 6 см, ал шардың радиусы 10 см болатын шар сегментінің көлемін табыңыз.

Шешімі:



Шар центрінен қима жазықтығына дейінгі қашықтықты табайық:

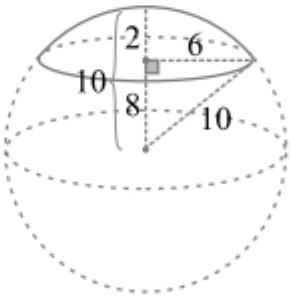
Пифагор теоремасы бойынша:

$$x^2 + 6^2 = 10^2$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8$$

Онда, шар сегментінің биіктігі 2 см:



Демек, шар сегментінің көлемі:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3R - h)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot (3 \cdot 10 - 2)$$

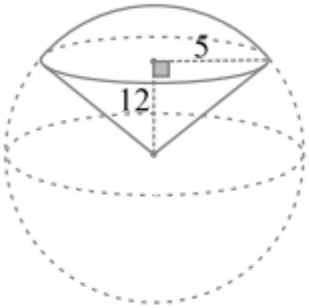
$$V = \frac{112\pi}{3}$$

Жауабы: $\frac{112\pi}{3}$ см^3.

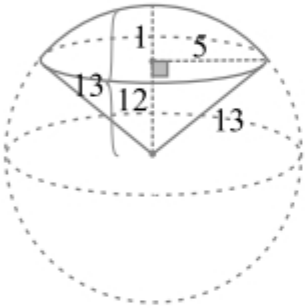
© «EduCon» басылымдары

Мысал 4

Шар секторының көлемін табыңыз:



Шешімі:



Пифагор теоремасы бойынша шардың радиусын табайық:

$$R^2 = 5^2 + 12^2$$
$$R^2 = 169$$
$$R = 13$$

Онда, шар сегментінің биіктігі 1 см.

Демек, $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi \cdot 13^2 \cdot 1 = \frac{338\pi}{3}$

Жауабы: $\frac{338\pi}{3}$ см^3.

© «EduCon» басылымдары

Есептер

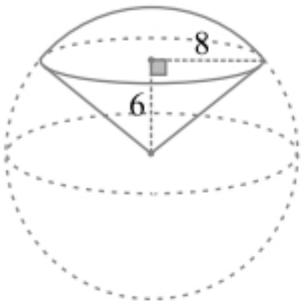
1. Шардың үлкен дөңгелегінің ауданы 16π см^2. Шардың бетінің ауданын табыңыз.

2. Радиустары 3 см, 4 см және 5 см болатын шарлар балқытылып, жаңа шар алынды. Пайда болған шардың радиусын табыңыз.

3. Егер $\angle OKO_1 = \alpha$ болса, онда қиманың ауданын табыңыз.

4. Шардың радиусы 25 см. Шардың центрінен 7 см қашықтықта орналасқан қиманың ауданын табыңыз.

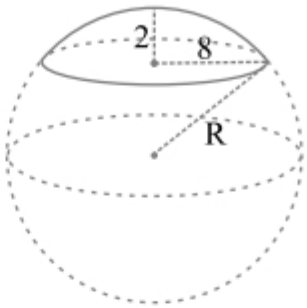
5. Шар секторының көлемін табыңыз.



6. Шардың центрі арқылы өтетін қиманың ауданы 36π см^2. Шарды центрінен шар радиусының жартысындай қашықтықта қиятын қиманың ауданын табыңыз.

7. Шардың центрінен 5 см қашықтықта орналасқан қиманың ауданы 144π см^2. Сфераның ауданын табыңыз.

8. Шар сегментінің көлемін табыңыз.



9. Бірінші шардың көлемі екінші шардың көлемінен 8 есе артық. Бірінші шардың бетінің ауданы екінші шардың бетінің ауданынан неше есе артық екенін табыңыз.

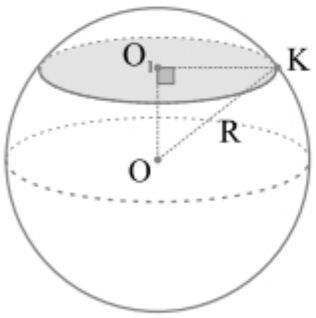
10. Диаметрдің ұшы арқылы оған 60°-тық бұрышпен қима жүргізілді. Қиманың ауданы 216π см^2. Шардың диаметрін табыңыз.

© «EduCon» басылымдары

11. Сфера центрінің бір жағында орналасқан, сфераны қиятын параллель жазықтықтардың қималарының ұзындығы 12π см және 16π см. Жазықтықтар арақашықтығы 2 см болса, сфераның ауданын табыңыз.

12. Шардың бетіндегі үш нүктенің бір-бірінен ара қашықтығы 9 см. Осы үш нүкте арқылы өтетін шар қимасының ауданын табыңыз.

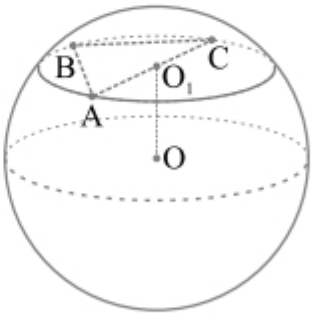
13. Шар центрінің екі жағында орналасқан параллель қималарының ауданы 144π см^2 және 81π см^2. Жазықтықтар арақашықтығы 21 см болса, онда шар бетінің ауданын табыңыз.



14. Жазықтық сфераны қияды. Қиылысу сызығындағы нүктеден жүргізілген шардың диаметрінің ұзындығы 16 см және ол жазықтықпен 45° бұрыш жасаса, қиылысу сызығының ұзындығын табыңыз.

15. Екі шардың радиустары 3 см және 8 см. Бетінің ауданы осы екі шардың бет аудандарының қосындысына тең болатын шардың радиусын табыңыз.

16. $AB = 4$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см және $OO_1 = 3$ см. Шардың көлемін табыңыз.



© «EduCon» басылымдары

ТЕСТ №16

1. Шардың радиусы $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ см. Шардың үлкен дөңгелегінің ауданын табыңыз.
   A) 48 см^2
   B) 64 см^2
   C) 72 см^2
   D) 36 см^2
   E) 42 см^2

2. Радиусы 3 см болатын шардың көлемін табыңыз.
   A) 24π см^3
   B) 36π см^3
   C) 48π см^3
   D) 52π см^3
   E) 32π см^3

3. Шар сегментінің биіктігі шар диаметрінің $\frac{1}{3}$ бөлігін құрайды. Шар сегментінің көлемінің шар көлеміне қатынасын табыңыз.
   A) 0,5
   B) $\frac{1}{7}$
   C) 0,8
   D) $\frac{7}{27}$
   E) $\frac{5}{27}$

4. Шар центрінен 12 см қашықтықта орналасқан қиманың ауданы 25π см^2. Шардың диаметрін табыңыз.
   A) $18\sqrt{2}$ см
   B) 14 см
   C) 32 см
   D) 30 см
   E) 26 см

5. Радиусы 5 см болатын сфераның ауданын табыңыз.
   A) 100π см^2
   B) 200π см^2
   C) 250π см^2
   D) 75π см^2
   E) 150π см^2

6. Шар бетінің ауданы 144π см^2 болса, онда көлемін табыңыз.
   A) 224π см^3
   B) 232π см^3
   C) 252π см^3
   D) 288π см^3
   E) 248π см^3

7. Шардың радиусын 3 есе үлкейтсек, онда оның...
   A) ауданы 3 есе кемиді.
   B) ауданы 3 есе артады.
   C) ауданы 9 есе кемиді.
   D) ауданы 9 есе артады.
   E) көлемі 9 есе кемиді.
   F) көлемі 9 есе артады.
   G) көлемі 27 есе кемиді.
   H) көлемі 27 есе артады.

8. Диаметрдің ұшы арқылы оған 30°-тық бұрышпен қима жүргізілді. Қиманың ауданы 27π см^2. Шардың көлемін табыңыз.
   A) 264π см^3
   B) 244π см^3
   C) 288π см^3
   D) 270π см^3
   E) 216π см^3

© «EduCon» басылымдары

9. Шар сегментінің радиусы 6 см, ал остік қимасының бұрышы 120°. Шар сегментінің көлемін табыңыз.
   A) 72π см^3
   B) 24π см^3
   C) 81π см^3
   D) 36π см^3
   E) 45π см^3

10. Екі шардың радиустары 3 см және 4 см. Бетінің ауданы осы екі шардың беттерінің аудандарының қосындысына тең болатын шардың радиусын табыңыз.
   A) 9 см
   B) 7 см
   C) 5 см
   D) 12 см
   E) 10 см

11. Ішкі және сыртқы беттерінің радиусы 2 см және 5 см болатын қуыс шардың көлемін табыңыз.
   A) 216π см^3
   B) 144π см^3
   C) 156π см^3
   D) 225π см^3
   E) 136π см^3

12. Ромбтың диагональдары 15 см және 20 см. Шар беті ромбтың барлық қабырғаларын жанайды. Егер шардың радиусы 10 см болса, онда шар центрінен ромб жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңыз.
   A) 8 см
   B) $6\sqrt{2}$ см
   C) 6 см
   D) 10 см
   E) 12 см

13. Радиусы 5 см болатын шардың центрінен 3 см қашықтықта жүргізілген қиманың ауданын табыңыз.
   A) 15π см^2
   B) 20π см^2
   C) 12π см^2
   D) 16π см^2
   E) 18π см^2

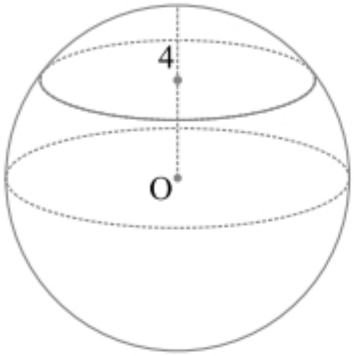
14. Шардың радиусының ортасы арқылы және оған перпендикуляр болатын қима жүргізілді. Егер шардың радиусы 12 см болса, онда қиманың ауданын табыңыз.
   A) 144π см^2
   B) 136π см^2
   C) 112π см^2
   D) 118π см^2
   E) 108π см^2

15. Екі шардың радиустарының қатынасы 3:4 қатынасындай. Көлемдерінің қатынасын табыңыз.
   A) 3:4
   B) 9:16
   C) 27:64
   D) 1:7
   E) 6:7

16. Шардың екі параллель қималарының аудандары 49π см^2 және 25π см^2. Қималардың арақашықтығы 6 см және шардың центрі қималардың арасында орналасқан. Сфераның ауданын табыңыз.
   A) 160π см^2
   B) 320π см^2
   C) 300π см^2
   D) 180π см^2
   E) 200π см^2

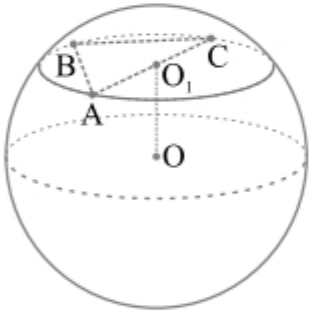
© «EduCon» басылымдары

17. Шар сегментінің биіктігі 4 см, ал табанының ауданы 64π см^2. Шардың радиусын табыңыз.



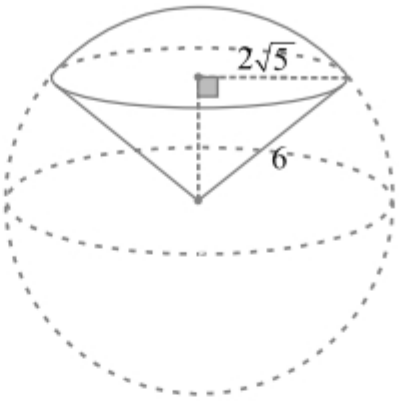
A) 10 см
B) 13 см
C) 5 см
D) 8 см
E) 12 см

18. $AB = 10$, $BC = 2\sqrt{11}$ және $OO_1 = 8$. Дұрыс тұжырым(-дар)ды анықтаңыз.



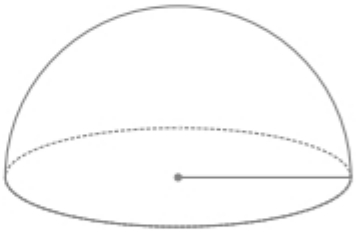
A) $S_{сф.} = 256\pi$
B) $V = 1000\pi$
C) $AO = 12$
D) $AC = 10$
E) $S_{сф.} = 400\pi$
F) $\angle ABC = 90^\circ$
G) $BO = 10$
H) $V = 4000\pi$

19. Шар секторының көлемін табыңыз.



A) 64π см^3
B) 24π см^3
C) 48π см^3
D) 27π см^3
E) 88π см^3

20. Жарты шардың көлемі 18π см^2. Жарты шардың толық бетінің ауданын табыңыз.



A) 18π см^2
B) 24π см^2
C) 32π см^2
D) 27π см^2
E) 48π см^2

© «EduCon» басылымдары

ТАРАУДЫ БЕКІТУ ТЕСТІ №5

1. Цилиндр мен конустың табандары мен биіктіктері ортақ. Цилиндрдің көлемі 180 см³. Конустың көлемін табыңыз.
   A) 100 см³
   B) 120 см³
   C) 60 см³
   D) 90 см³
   E) 45 см³

2. Дұрыс төртбұрышты призма табан радиусы 1 см болатын цилиндрге сырттай сызылған. Егер призманың бүйір бетінің ауданы 32 см² болса, онда цилиндрдің биіктігін табыңыз.
   A) 1 см
   B) 3 см
   C) 2 см
   D) 6 см
   E) 4 см

3. Дұрыс пирамиданың табанында қабырғасы $3\sqrt{3}$ см болатын дұрыс үшбұрыш жатыр. Пирамиданың биіктігі $2\sqrt{3}$ см болса, онда көлемін табыңыз.
   A) $15\frac{1}{4}$ см³
   B) 14 см³
   C) 12 см³
   D) $12\frac{1}{2}$ см³
   E) $13\frac{1}{2}$ см³

4. Қиық конустың табан радиустары 5 см және 11 см, ал жасаушысы 10 см. Остік қимасының ауданын табыңыз.
   A) 128 см²
   B) 134 см³
   C) 146 см³
   D) 240 см³
   E) 136 см³

5. Тікбұрышты параллелепипед табан радиусы 4 см болатын цилиндрге сырттай сызылған. Параллелепипедтің көлемі 16 см³. Цилиндрдің биіктігін табыңыз.
   A) 4 см
   B) 1 см
   C) 0,25 см
   D) 0,5 см
   E) 2 см

6. Тікбұрышты ABC үшбұрышының C төбесі арқылы гипотенузасына параллель және одан 1 см қашықтықта болатындай қылып жазықтық жүргізілді. Катеттерінің осы жазықтыққа проекциялары 3 см және 5 см. Үшбұрыштың гипотенузасын табыңыз.
   A) 6 см
   B) 7 см
   C) 4 см
   D) 2 см
   E) 9 см

© «EduCon» басылымдары

7. Цилиндрге радиусы 3 см болатын шар іштей сызылған. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) 18π см^2
   B) 32π см^2
   C) 28π см^2
   D) 48π см^2
   E) 36π см^2

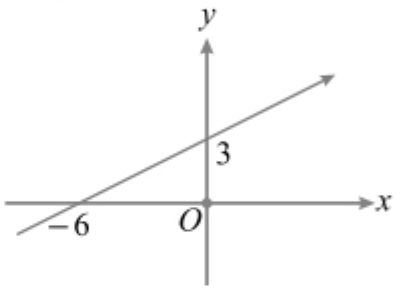
8. Дұрыс үшбұрышты пирамида шарға іштей сызылған. Шардың радиусы 10 см, ал пирамида табанының қабырғасы $6\sqrt{3}$ см. Пирамиданың көлемін табыңыз.

   A) $192\sqrt{3}$ см^3
   B) $144\sqrt{3}$ см^3
   C) $216\sqrt{3}$ см^3
   D) $162\sqrt{3}$ см^3
   E) $108\sqrt{3}$ см^3

9. Көлемі 12 см^3 болатын шарға цилиндр сырттай сызылған. Цилиндрдің көлемін табыңыз.
   A) 24 см^3
   B) 18 см^3
   C) 20 см^3
   D) 16 см^3
   E) 36 см^3

10. Цилиндр кубқа іштей сызылған. Егер кубтың көлемі 40 см^3 болса, онда цилиндрдің көлемін табыңыз.
   A) 25π см^3
   B) 35π см^3
   C) 20π см^3
   D) 40π см^3
   E) 10π см^3

11. Суретте көрсетілген түзудің теңдеуін жазыңыз:



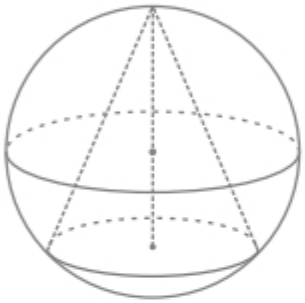
   A) $y=-0,5x+3$
   B) $y=-2x-2$
   C) $y=6x+3$
   D) $y=0,5x+3$
   E) $y=-0,25x-2$
   F) $x-2y+6=0$
   G) $x+4y+2=0$
   H) $2x+y+2=0$

12. Дұрыс пирамиданың табан ауданы 12 см^2, ал биіктігі 8 см. Пирамиданың көлемін табыңыз.
   A) 32 см^3
   B) 38 см^3
   C) 48 см^3
   D) 24 см^3
   E) 36 см^3

© «EduCon» басылымдары

13. Кубтың қыры $2\sqrt{3}$ см. Осы кубқа сырттай сызылған шардың радиусын табыңыз.
A) 4 см
B) $3\sqrt{3}$ см
C) 6 см
D) 3 см
E) $4\sqrt{3}$ см

14. Табан радиусы 8 см, ал биіктігі 16 см болатын конус шарға іштей сызылған. Шардың радиусын табыңыз.



A) 10 см
B) 12 см
C) 11 см
D) 6 см
E) 9 см

15. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы $2\sqrt{2}$ см, ал биіктігі 2 см. Осы пирамидаға сырттай сызылған шардың радиусын табыңыз.
A) $3\sqrt{2}$ см
B) $2\sqrt{2}$ см
C) 2 см
D) 4 см
E) 3 см

16. Көлемі 60 см^3 болатын цилиндрге іштей сызылған шардың көлемін табыңыз.
A) 40 см^3
B) 42 см^3
C) 36 см^3
D) 45 см^3
E) 50 см^3

17. Радиусы $2\sqrt{2}$ болатын сфера кубқа іштей сызылған. Дұрыс тұжырым(-дар)ды табыңыз.
A) $S_{сф.} = 32\pi$
B) $V_{шар} = 64\pi$
C) $a = 4$
D) $S_{куб\ б.ж.} = 16$
E) $S_{куб\ б.б.} = 128$
F) $S_{куб\ т.б.} = 256$
G) $S_{куб\ таб.} = 16\sqrt{2}$
H) $V_{куб} = 128\sqrt{2}$

18. Тікбұрышты ABC үшбұрышының C төбесі арқылы гипотенузасына параллель және одан 3 см қашықтықта болатындай қылып жазықтық жүргізілді. Катеттерінің осы жазықтыққа проекциялары $3\sqrt{3}$ см және $\sqrt{55}$ см. Үшбұрыштың гипотенузасын табыңыз.
A) 16 см
B) 8 см
C) 14 см
D) 10 см
E) 9 см

© «EduCon» басылымдары

ТАРАУДЫ БЕКІТУ ТЕСТІ №6

1. Егер P(6;2) және Q(7;3) болса, онда Q нүктесіне қарағанда P нүктесіне симметриялы M нүктесінің координаталарын табыңыз.
   A) M(3;4)
   B) M(4;7)
   C) M(10;6)
   D) M(4;12)
   E) M(8;4)

2. $y=3x-4$ түзуіне параллель және M(3;8) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
   A) $y=2x+2$
   B) $y=-3x+4$
   C) $y=3x+8$
   D) $y=3x-1$
   E) $y=-\frac{1}{3}x+4$

3. Радиусы 3 см болатын шардың көлемін табыңыз.
   A) 36π см^3
   B) 48π см^3
   C) 24π см^3
   D) 72π см^3
   E) 27π см^3

4. Пирамиданың биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель болатын қима жүргізілді. Егер табанының ауданы 48 см^2 болса, онда қиманың ауданын табыңыз.
   A) 6 см^2
   B) 8 см^2
   C) 12 см^2
   D) 16 см^2
   E) 24 см^2

5. Ұзындығы 25 см болатын кесінді жазықтықты қиып өтеді. Егер кесіндінің ұштары жазықтықтан 7 см және 13 см қашықтықта жатса, онда кесіндінің проекциясының ұзындығын табыңыз.
   A) 15 см
   B) 17 см
   C) 18 см
   D) 10 см
   E) 16 см

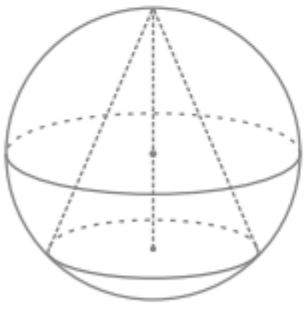
6. Толық бетінің ауданы 216 см^2 болатын кубтың көлемін табыңыз.
   A) 172 см^3
   B) 224 см^3
   C) 216 см^3
   D) 180 см^3
   E) 320 см^3

© «EduCon» басылымдары

7. Жасаушысы 10 см, ал табанындағы шеңбердің ұзындығы 12π см болатын конустың көлемін табыңыз.
   A) 48π см^3
   B) 72π см^3
   C) 108π см^3
   D) 96π см^3
   E) 144π см^3

8. Цилиндрдің остік қимасының диагоналі табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбеген және ұзындығы 12 см. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) $16\pi\sqrt{2}$ см^2
   B) $48\pi\sqrt{3}$ см^2
   C) $36\pi\sqrt{3}$ см^2
   D) $62\pi\sqrt{3}$ см^2
   E) $24\pi\sqrt{2}$ см^2

9. Табан радиусы 6 см, ал биіктігі 18 см болатын конус шарға іштей сызылған. Шардың радиусын табыңыз.

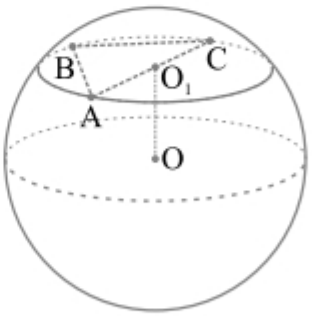


   A) 10 см
   B) 12 см
   C) 14 см
   D) 6 см
   E) 8 см

10. Егер $A(4;-2)$, $B(3;1)$, $C(-2;4)$ және $D(2;3)$ болса, онда $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңыз.
   A) –6
   B) 9
   C) –7
   D) 8
   E) –10

11. Конустың остік қимасы периметрі $8\left(2+\sqrt{2}\right)$ см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңыз.
   A) $32\pi\sqrt{2}$ см^2
   B) $36\pi\sqrt{2}$ см^2
   C) $48\pi\sqrt{2}$ см^2
   D) $54\pi\sqrt{2}$ см^2
   E) $72\pi\sqrt{2}$ см^2

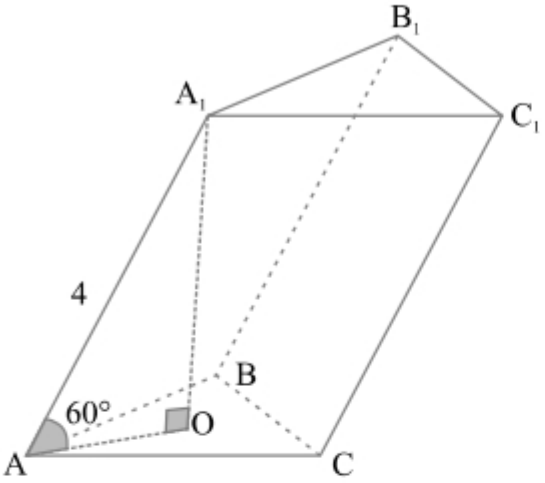
12. $AB=2\sqrt{10}$ см, $BC=2\sqrt{6}$ см және $OO_1=3$ см. Сфераның ауданын табыңыз.



   A) 60π см^2
   B) 25π см^2
   C) 150π см^2
   D) 180π см^2
   E) 100π см^2

© «EduCon» басылымдары

13. О нүктесі ABC дұрыс үшбұрышының центрі. Призма туралы дұрыс тұжырым(-дар)ды табыңыз.

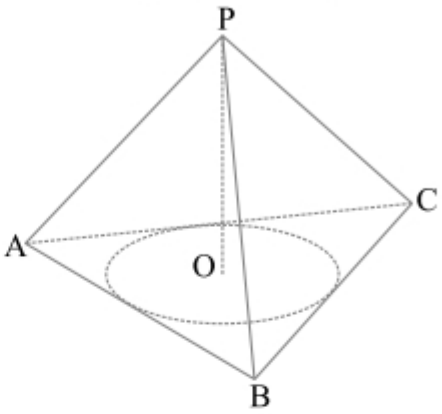


A) $V=18$
B) $S_{ABC}=3\sqrt{3}$
C) $A_1C=5$
D) $AO=2\sqrt{3}$
E) $S_{AOA_1}=3\sqrt{3}$
F) $V=18\sqrt{3}$
G) $S_{BB_1C_1C}=8\sqrt{3}$
H) $P_{ABC}=8\sqrt{3}$

14. Егер $\left|\vec{a}\right|=21$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=26$ және $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=28$ болса, онда $\left|\vec{b}\right|$ өрнегінің мәнін табыңыз.

A) 15
B) 16
C) 17
D) 18
E) 19

15. Табаны ABC үшбұрышы болатын дұрыс пирамида берілген. PO=5 см, S_o=144 см^2 Пирамиданың төбесінен табанының қабырғаларына дейінгі қашықтықты табыңыз.



A) 11 см
B) 12 см
C) 13 см
D) 14 см
E) 15 см

16. Цилиндрдің биіктігі 10, ал табанының диаметрі 18. Дұрыс тұжырым(-дар)ды табыңыз.

A) $R=6$
B) $V=810\pi$
C) $V=1800\pi$
D) $S_{таб.}=81\pi$
E) $S_{таб.}=324\pi$
F) $S_{б.б.}=90\pi$
G) $S_{б.б.}=45\pi$
H) $S_{т.б.}=342\pi$

© «EduCon» басылымдары

“Education Consulting”

Ұлттық Бірыңғай Тестілеуге дайындыққа арналған

ГЕОМЕТРИЯ

Құрастырғандар: Кожахметов Дамир, Газизов Тимур, Нуржан Рүстем

Редакторы: Есембеков Бағдат

Компьютерге беттеген: Джамалов Бекзат, Сайгелдиев Мырзабек

Дизайнері: Сафаев Сафа